

◇ Digressione: le funzioni oloomorfe

Sia $U \subset \mathbb{C}$ una regione (i.e. un aperto connesso)

Poniamo, al solito $z = x + iy$

Sia $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := u(z) + i v(z) \equiv$

una funzione complessa

$$u(x, y) + i v(x, y)$$

(i.e. definita su $z \in \mathbb{C}$ e a valori complessi)

$$u := \operatorname{Re} f \quad \text{parte reale di } f$$

$$v := \operatorname{Im} f \quad \text{parte immaginaria di } f$$

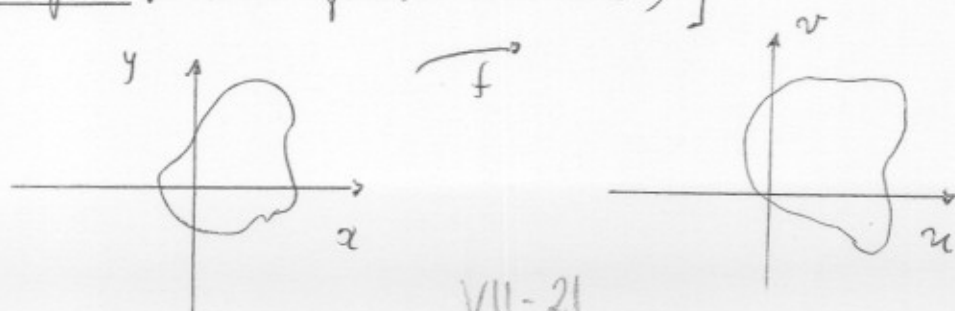
una funzione si trasforma in modo naturale in una trasformazione piana

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in U$$

Sia $f \in \mathcal{B}^1(U)$ [ciò semplifica la trattazione;

di fatto le f. oloomorfe (v. oltre) risulteranno \mathcal{B}^{∞} automaticamente e, di più analitiche, ovvero

si espandono in serie di potenze in un opportuno cerchio di convergenza (e potranno, di fatto, identificarsi con queste ultime)]



Def. Sia $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{U})$, $z_0 \in \mathcal{U}$. f si dice olomorfa in $z_0 \in \mathcal{U}$ se è ivi derivabile nel senso complesso, vale a dire se

$$\exists f'(z_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

\mathbb{A}

\mathbb{C}



rapporto
incrementale
complesso
($h \in \mathbb{C}$)

f si dirà olomorfa in \mathcal{U}

se f' esiste $\forall z_0 \in \mathcal{U}$

$$\mathcal{H}(\mathcal{U}) := \{f. \text{ olomorfe in } \mathcal{U}\}$$

Teorema

$f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}) \Leftrightarrow$ valgono le

condizioni di Cauchy-Riemann (CR)

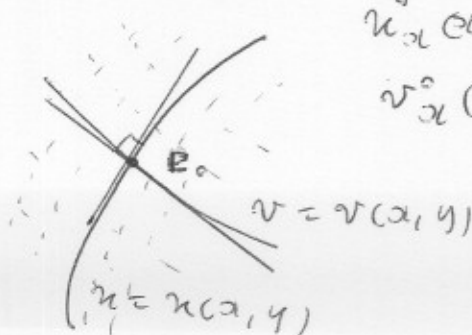
$$\text{CR: } \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Osserviamo che le CR ci dicono che la trasformazione piana indotta da f è ortogonale, ovvero le linee $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$ si tagliano perpendicolarmente in ogni punto.

rette tangenti in P_0 :

$$u'_x(x-x_0) + u'_y(y-y_0) = 0$$

$$v'_x(x-x_0) + v'_y(y-y_0) = 0$$



$$df := dx + i dy = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

(da Holzfaser keine variablen in der Produkt)

Si trova, per una $f \in \mathcal{O}(U)$ possiamo ($f = f(z, \bar{z})$)

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Forme $dz := dx + i dy$ (differenziale complesso) $d\bar{z} := dx - i dy$ ($= d\bar{z}$)

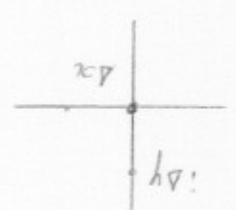
$f'(z_0) = f'_x = -i f'_y$

Notiamo che

ricorda, i fidele varifone che $CR \Rightarrow$ e' Krullman di

$$\begin{aligned} &= N'_y - i N'_x \Rightarrow \\ &= -i(N'_y + i N'_x) = -i f'_x \\ &CR: \begin{cases} N'_x = N'_y \\ N'_y = -N'_x \end{cases} \end{aligned}$$

x per $\Delta z = h = x \Delta x + i y \Delta y$, si trova $f'(z_0) = N'_x \Delta x + i N'_y \Delta y$



posto $h = \Delta x \in \mathbb{R}$, e' subito $f'(z_0) = f'_x = N'_x + i N'_y$

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Dur. (\Rightarrow) $f \in \mathcal{H}(U)$ si ha, in $P_0 \in z_0 = x_0 + i y_0$

$$\begin{aligned} z &= x + i y & \bar{z} &= x - i y \\ x &= \frac{z + \bar{z}}{2} & y &= \frac{z - \bar{z}}{2i} \end{aligned}$$

Le CR divengono equivalenti a $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ ($f_{\bar{z}} = 0$)

inoltre è pure $f' = f_z$.

Analogamente al caso reale si prova che combinazioni
 • lineari, prodotti, f. composte di f. olomorfe sono
 olomorfe

★★ Le funzioni analitiche (ovvero, sulleppochi in

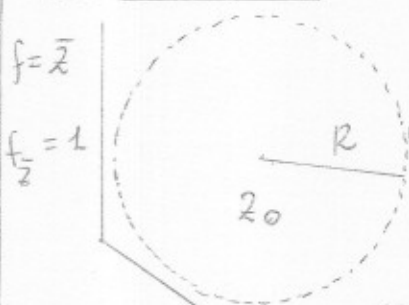
serie di potenze in ogni pt. del loro dominio, convergente
 in un cerchio di convergenza di raggio positivo) sono

olomorfe : $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad |z-z_0| < R$

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

↑ derivazione termine
a termine

Esempi di f.
 • non olomorfe:



$f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$
 $f_{\bar{z}} = z$ (= 0 solo per $z=0$)

in caso:
 [la convergenza è assoluta, i.e. $\sum |a_n| r^n$ converge,
 ed è uniforme e addebitura totale
 (-M-test di Weierstrass) in $|z-z_0| \leq R_1 < R$]

Di fatto, è vero anche il reciproco: una f. olomorfa
 è analitica ... non è difficile, ma la dimostrazione
 ci porterebbe troppo lontano ...)

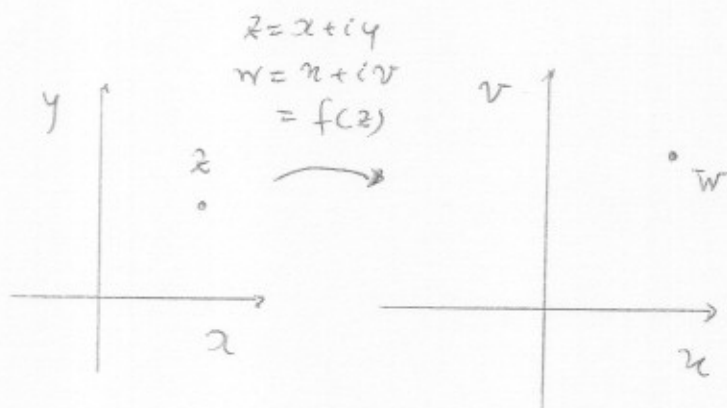
Di fatto, abbiamo prodotto l'esempio generale!

Lo scopo di questa digressione è la dimostrazione
 del seguente fatto geometrico, di importanza capitale

★ Teorema Sia $f \in \mathcal{K}(U)$, $f' \neq 0$ in U

Alloca f induce una trasformazione conforme

Dim. La metrica euclidea standard è $dx^2 + dy^2 = dz d\bar{z}$. [immediato: $dz d\bar{z} = (dx + i dy)(dx - i dy) = \dots dx^2 + dy^2$]



Si ha allora, successivamente:

$$du^2 + dv^2 = dw d\bar{w}$$

$$= df d\bar{f} = df d\bar{f} \quad \triangle$$

= [poiché f è olomorfa]

$$= f' dz \cdot \overline{f'} d\bar{z} \quad \downarrow \quad \bar{f}' = 0$$

$$= |f'|^2 dz d\bar{z} \quad \square$$

$$\left(= (u_x^2 + u_y^2)(dx^2 + dy^2) \right. \\ \left. = (v_x^2 + v_y^2)(dx^2 + dy^2) \right)$$

$$|f'|^2 = |f_x|^2 = |f_y|^2 \\ = |f_z|^2$$

si osserva che $\frac{\Delta \bar{F}}{\Delta \bar{z}} = \frac{\Delta F}{\Delta z} = \frac{\Delta F}{\Delta \bar{z}}$

questo calcolo, in ambiente reale:

$$du^2 + dv^2 = (u_x dx + u_y dy)^2 + (v_x dx + v_y dy)^2$$

$$= u_x^2 dx^2 + u_y^2 dy^2 + 2u_x u_y dx dy + v_x^2 dx^2 + v_y^2 dy^2 + 2v_x v_y dx dy$$

$$= (u_x^2 + v_x^2) dx^2 + (u_y^2 + v_y^2) dy^2$$

$$+ 2 [u_x u_y + v_x v_y] dx dy$$

$$= (CR) = (u_x^2 + v_x^2)(dx^2 + dy^2)$$

$$(u_y^2 + v_y^2)$$

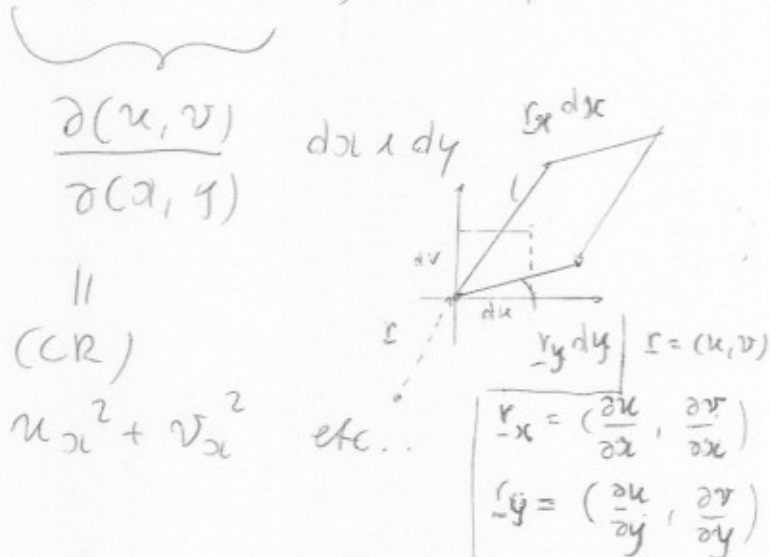
$$(u_x^2 + u_y^2) \text{ etc...}$$

viceversa, una transf. conforme è sempre ★ indotta da una f , olomorfa o anti-olomorfa, a seconda che si conserva o meno l'orientamento del piano

Osserviamo anche che $|f'|^2$ è anche il coefficiente (o fattore) di distorsione delle aree

$$\underbrace{du \wedge dv}_{\substack{\text{area} \\ \text{orientata} \\ (= du dv)}} = (u_x dx + u_y dy) \wedge (v_x dx + v_y dy) \\ = \dots = u_x v_y dx \wedge dy + u_y v_x dy \wedge dx \\ = \underbrace{(u_x v_y - u_y v_x)}_{\substack{\text{CR} \\ u_x^2 + v_x^2}} dx \wedge dy$$

$dx \wedge dy = -dy \wedge dx$
 $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$
 prodotto esterno antisimmetrico
 (o wedge)



Ripetiamo alcune forme delle

CR:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad \text{cartesiana} \quad (x, y)$$

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r} v_\phi \\ u_\phi = -r v_r \end{cases} \quad \text{polare} \quad (r, \phi)$$

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases} \quad \begin{matrix} r \neq 0 \\ \phi \in [0, 2\pi) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

complessa: $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = f_{\bar{z}} = 0$

||
:
:

Esiste inoltre il seguente, notevolissimo, teorema di Riemann ^{***}, che si enuncia ad enunciazione: date due regioni semplicemente connesse, esiste sempre una funzione biolomorfa (cioè olomorfa assieme alla sua inversa) che mappa l'una sull'altra (un esempio notevole: il semipiano e il disco di Poincaré)

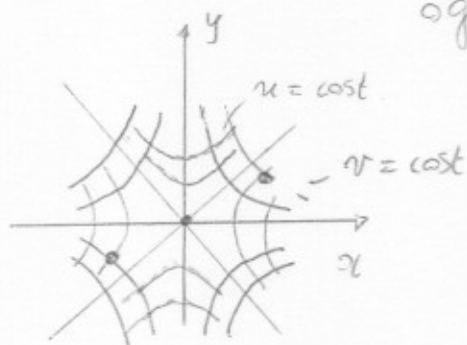
Esempi

$$w = f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_u + i \underbrace{2xy}_v$$

$$u = x^2 - y^2$$

$$v = 2xy$$

famiglie di iperboli equilateri nel piano (x, y) , che si intersecano ortogonalmente in ogni punto



$$f'(z) = 2z \neq 0 \text{ per } z \neq 0$$

Si ha locale invertibilità

$$z = \sqrt{w}$$

due radici!

sup. di Riemann
a due fogli

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$\leadsto e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

prol. analitico

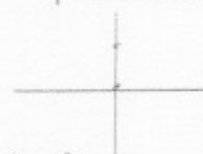
Si osserva come, a livello complesso, non ci siano differenze tra funzioni ciccolari e funzioni iperboliche ecc:

$$\sinh(iz) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i)^{2k+1} z^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} z^{2k+1}}{(2k+1)!} = i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad i^{2k} = (-1)^k = i \sin z$$

e^z (e^z , \cos , \sin , \cosh , \sinh) ammette un periodo:

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z$$



Le funzioni ellittiche sono doppie periodiche ...

◇ Elementi di cartografia (digressione)

Si consideri la variabile complessa

$$z := U + i \lambda$$

$\begin{matrix} \text{latitudine} & \text{longitudine} \\ \text{crescente} & \text{(ellissoidica)} \\ \text{(ellissoidica)} & \uparrow \\ & \text{carta di Mercatore generalizzata} \end{matrix}$

una carta conforme si ottiene ponendo

$$z = x + iy = F(\xi) = F(U + i\lambda)$$

\uparrow
 funzione ologomorfa (CR)

★ Nella carta di Gauss (detta UTM Universal Mercator Projection)

Si sceglie un meridiano di riferimento e si

pone $F(U) =$ lunghezza dell'arco di meridiano
 $\stackrel{||}{=} F(U, 0)$ (convolge funzioni di Bessel, in generale $i > 0$)

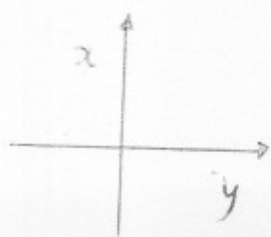
$$F(U) = f(\varphi)$$

\nwarrow latitudine (ellissoidica)

Si ha, successivamente (per λ in un intervallo opportuno...)

$$z = x + iy = F(U, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(U)}{k!} (i\lambda)^k$$

\star prolungamento analitico



(si ricordi f ologomorfa $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$ etc.)

Convenzione dei cartografi!

Si usa, per calcolare $F^{(k)}(U)$ il teorema di derivazione delle f. composte.

$$\frac{dF}{dU} = \frac{df}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dU} \quad (\text{abuso di notazione...})$$

etc.

Le formule risultanti non sono banali, neppure nel caso sferico $e=0$.
 v. pag. successiva per uno schizzo della carta di Gauss

Svolgiamo il calcolo, per concretezza

latitudine crescente \rightarrow $\bar{U} = \int_0^{\varphi} \frac{1}{\cos t} dt = \log \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$
 (sferica)

$$\frac{d\bar{U}}{d\varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} \quad \frac{d\varphi}{d\bar{U}} = \cos \varphi$$

$(\Rightarrow \bar{f} = \varphi)$ (come f. di φ !!)

$F(\bar{U}) = \varphi$ (posto $R=1$) λ : longitudine ordinaria (sferica)

$$x + iy = \varphi + i \lambda \cos \varphi + \frac{1}{2} F^{(2)}(\bar{U}) (-\lambda^2) + \dots$$

$$\begin{aligned} &F^0(\bar{U}) \\ &|| \\ &F(\bar{U}) \\ &|| \\ &\varphi \end{aligned}$$

$$F^{(2)}(\bar{U})$$

$$F'(\bar{U}) = \cos \varphi$$

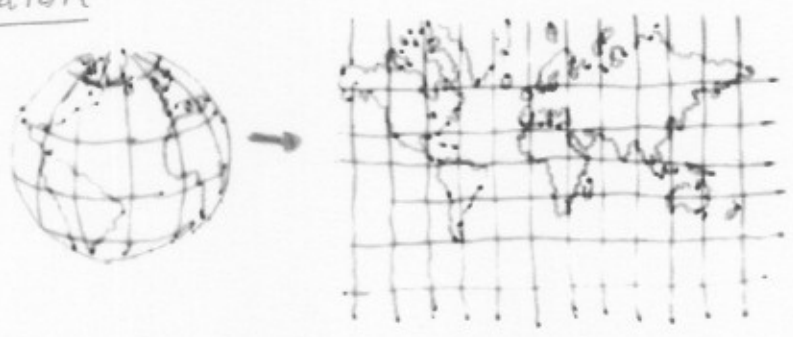
$$F''(\bar{U}) = \frac{d(\cos \varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\bar{U}} =$$

$$= -\sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

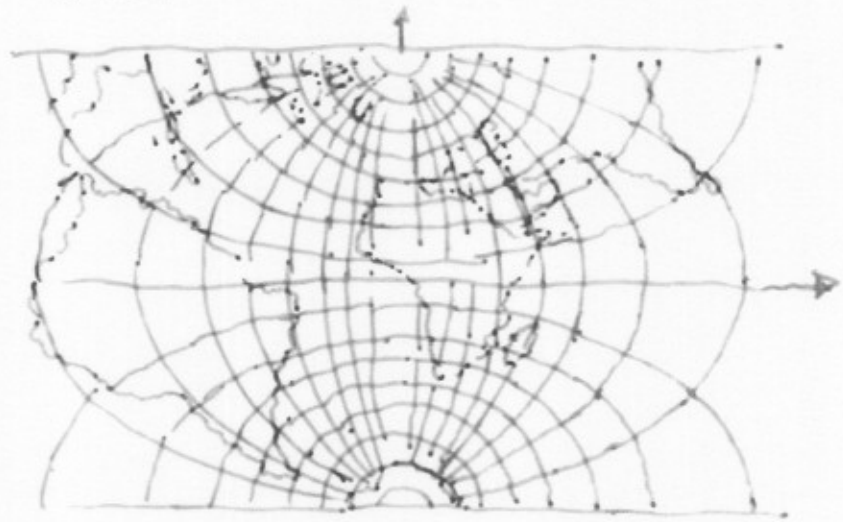
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \varphi + \frac{\lambda^2}{2} \sin \varphi \cos \varphi + \dots \\ y = \lambda \cos \varphi + \dots \end{cases}$$

che consentono di ottenere il grafico dei meridiani ($\lambda = \text{cost}$) e dei paralleli ($\varphi = \text{cost}$)

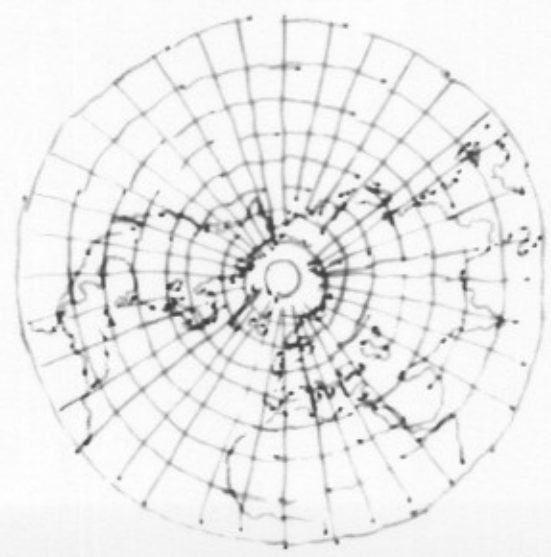
* Proiezione di Mercatore



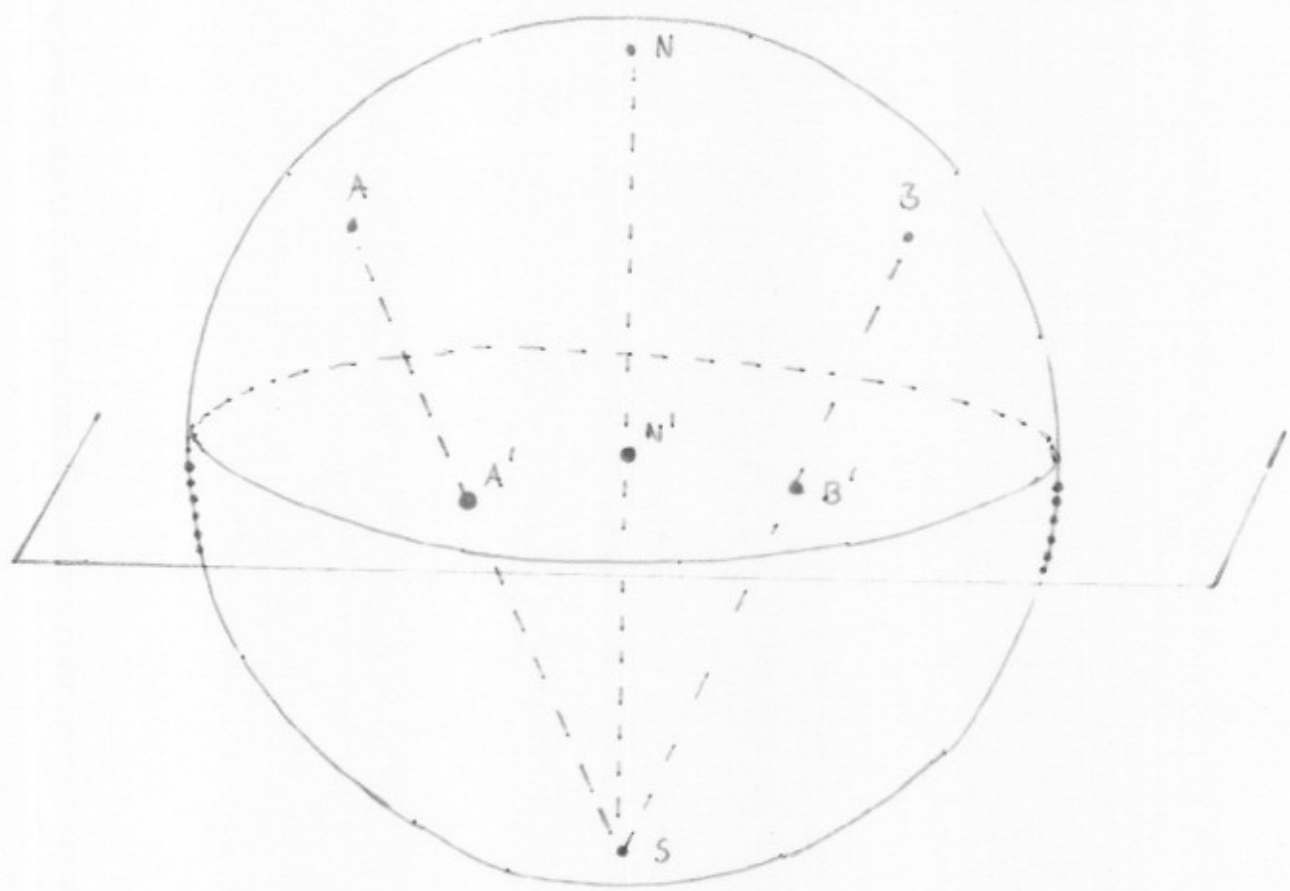
* Proiezione di Gauss



* Proiezione stereografica (dal polo sud)



* Proiezione stereografica (Ipparco II sec. a. C.)
(dal polo sud)



⇨ Olomorfa e armonicità

(convenimenti)

$$\begin{cases} u_{xx} = v_{yy} \\ u_{yy} = -v_{xx} = -v_{yy} \end{cases} \quad (\text{Schwarz})$$

$$\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} \equiv \Delta u = 0$$

ovvero u è armonica

$$\uparrow \text{laplaciano: } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Analogamente $\Delta v = 0$; dunque, se $f = u + iv$ è olomorfa in una regione \mathcal{U} , le sue parti reali e immaginarie u e v sono armoniche in \mathcal{U} .

Sia ora $g \in C^2(\mathcal{U})$, g armonica.

Allora g non può avere max o min relativi propri in \mathcal{U} ; infatti, in un tale punto $P_0 \in \mathcal{U}$ si

avrebbe $g''_{xx} < 0$ e $g''_{yy} > 0$, rispettiva-

mente, il che è assurdo. [Nota: la dimostrazione fornita è imperfetta (Perché?), ma l'enunciato è vero]

Di conseguenza, se $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$, e g è una funzione armonica limitata, essa è necessariamente costante (teorema di Liouville ***)

Di più, se f è una funzione intera (domata in tutto \mathbb{C})
limitata , allora f è costante (tale corollario è
 ancora chiamato teorema di Liouville .

Corollario : il teorema fondamentale dell'algebra) $\left(\begin{array}{c} \square \square \\ 0 \ 0 \end{array} \right)$

|| Sia $P = P(z)$ un polinomio complesso di grado
 $n \geq 1$. Allora P ammette almeno una radice

(Di conseguenza, per Ruffini, ne ammette n ,
 contate con la loro molteplicità ; riassumendo:
 un polinomio (non nullo), di grado $n \geq 0$ possiede
 n radici, contate con la loro molteplicità) .

Dim. Per assurdo, sia $P(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Consideriamo la funzione $f: f(z) = \frac{1}{P(z)}$

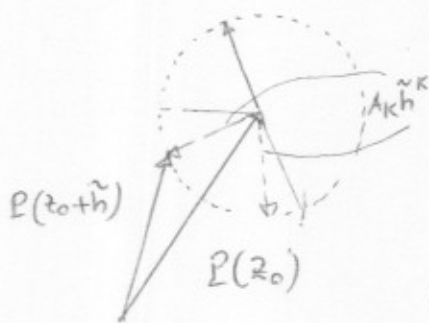
f è intera , è limitata (ciò segue facilmente
 da $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$) , e pertanto è costante ,
 epperò lo è anche P ; assurdo.

Nota . esistono moltissime dimostrazioni (molte più
 elementari) del t. f. dell'algebra ; questa è la
 più rapida , ma richiede parecchi prerequisiti .

Per concludere , ne abbozziamo una molto semplice :

Sia $g: g(z) := |P(z)|$. g è una f. continua in \mathbb{C} , ed è facile rendersi conto (da $\lim_{z \rightarrow \infty} g = +\infty$) dal teorema di Weierstraß, che \exists un pto di minimo assoluto $z_0 \in \mathbb{C}$. Vogliamo dimostrare che $P(z_0) = 0$. Sia per assurdo $P(z_0) \neq 0$.

Consideriamo $P(z_0 + h) = P(z_0) + \underbrace{A_k h^k}_{\neq 0} + o(h^k)$



È facile determinare \tilde{h} in modo tale che \tilde{h} suff. piccolo per $h \neq 0$

$$|P(z_0 + \tilde{h})| < |P(z_0)|,$$

contro l'ipotesi che z_0 sia pto di min.

assoluto di $|P|$. L'assurdo prova l'asserto.

Le funzioni u e v si dicono armoniche coniugate. Se u è semplicemente connessa la conoscenza di una (per ex u) consente di ricostruire l'altra (a meno di una costante).

Consideriamo la 1-forma $w := \underbrace{P}_{u_x} dx + \underbrace{Q}_{-u_y} dy$

Si ha $dw = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy = 0$, ossia $u_{xx} + u_{yy} = 0$

w è chiusa. In base al lemma di Poincaré essa è esatta (u è sempl. connessa), sicché $w = dv$

per qualche v : $v_x = -u_y$, $v_y = u_x$: ma (det. a meno di una costante)

questo ci dice che $f := u + iv$ è olomorfa (sono le CR)

(ovviamente, v è armonica...).