◇ Compattezza

Sia (X, τ) uno spazio topologico. Una famiglia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$, $U_\alpha \in \tau$, tale che

$$X = \bigcup_{\alpha \in \Omega} U_\alpha ,$$

è detta ricoprimento (aperto) di X

se $B \subset \Omega$ e $X = \bigcup_{\beta \in B} U_\beta$, $\mathcal{U}' = \{U_\beta\}_{\beta \in B}$

è detto sottoricoprimento (aperto) di X

Più in generale, se $S \subset X$, un ricoprimento di S è una collezione $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$, $U_\alpha \in \tau$ tale che

$S \subset \bigcup_{\alpha \in \Omega} U_\alpha$. Analoga è la definizione di sottoricoprimento di S.

Se Ω è un insieme finito si parla di ricoprimento finito.

Def. 1. Uno spazio topologico (X, τ) è detto compatto (secondo Heine-Pincherle-Borel) se un qualsiasi ricoprimento di X ammette un sottoricoprimento finito.

2. Un sottoinsieme $S \subset X$ è detto compatto se, parimenti, un suo qualsiasi ricoprimento ammette un sottoricoprimento finito.

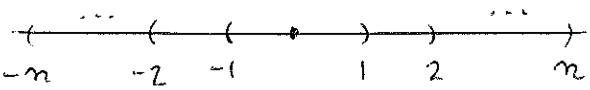
Notiamo che, da $S \subset \bigcup_{\alpha\in\Omega} \mathcal{U}_\alpha$ segue

$$S = S \cap \bigcup_{\alpha\in\Omega} \mathcal{U}_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\Omega} (\underbrace{S \cap \mathcal{U}_\alpha}_{\in \tau_S})$$ (topologia relativa)

e viceversa,

sicché $S \subset X$ è compatto se e solo se il sottospazio (S, τ_S) è compatto come spazio topologico (munito della topologia relativa)

* Notiamo subito che, ad esempio $\mathbb{R}$, con la sua topologia naturale, non è compatto: $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (-n, n)$, $\mathbb{N}^* = \{1,2,\dots\}$



e dal ricoprimento dato non è possibile estrarre alcun sottoricoprimento finito.

Similmente, un intervallo aperto, ex $(-1,1)$ non è compatto: $(-1,1) = \bigcup_{n=2}^{\infty} \left(-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)$ ....

In $\mathbb{R}^n$ si dà la seguente definizione ("classica") di compattezza: $K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto se è chiuso e limitato (i.e. è contenuto in una palla)

es: $[0,1]$ è compatto; $\mathbb{R}$, $(0,1)$, $[0,1)$ non lo sono.

|| Le due nozioni di compattezza coincidono in $\mathbb{R}^n$: precisamente, vale il seguente teorema

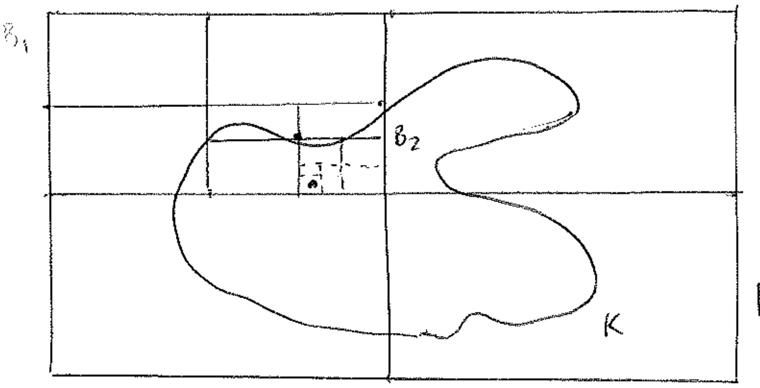
★ Teorema Sia $K \subset \mathbb{R}^n$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. K è compatto (i.e. chiuso e limitato)
2. K è compatto (secondo HPB)
3. [Proprietà di Bolzano-Weierstraß] Ogni sottoinsieme infinito di K possiede un punto di accumulazione in K

(in particolare, una successione in K ammette una sottosuccessione convergente in K).

Dim. Dimostriamo che $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$

$1 \Rightarrow 2$ K è contenuto in un plurirettangolo chiuso B_0 (per fissare le idee $n=2$...) [K è limitato].



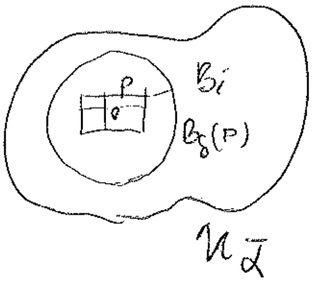
Neghiamo 2: esiste un ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ di K da cui non è possibile estrarre un sottoricoprimento finito. Dividiamo B_0 in quattro parti; una di queste non sarà ricoperta con un numero finito di aperti del ricoprimento. Iterando il procedimento (v. figura) troviamo $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots B_i \supset \dots$ tali che $B_i \cap K$ non è ricoperta da un numero finito di aperti. Si osservi che

$\operatorname{diam}(B_i) \to 0$ se $i \to \infty$.
diametro di B_i

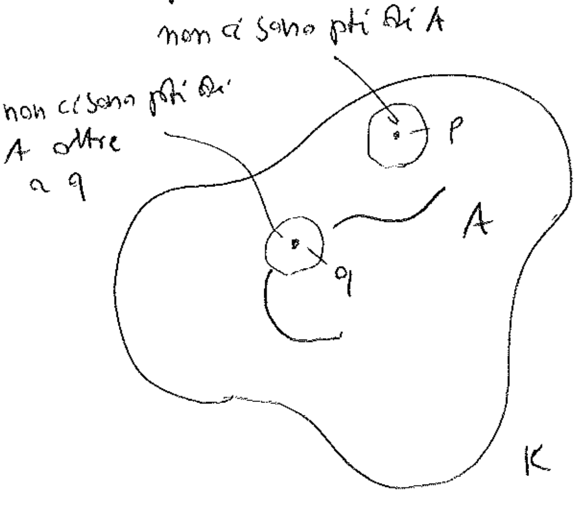
Proiettandola sugli "assi coordinati", e utilizzando le proprietà di $\mathbb{R}$, troviamo che $p \in \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$, e che p è punto di accumulazione di K. Essendo K chiuso, $p \in K$. Sia $\mathcal{U}_{\bar\alpha}$, $\bar\alpha \in \mathfrak{A}$ tale che $p \in \mathcal{U}_{\bar\alpha}$ (ne esiste almeno uno).

Ma allora, per un opportuno $\delta > 0$, $\mathcal{U}_{\bar\alpha} \supset B_\delta(p) \supset B_i$, $i > \bar{i}$ opportuno. Ciò contraddice l'ipotesi iniziale.

Dunque $1 \Rightarrow 2$.



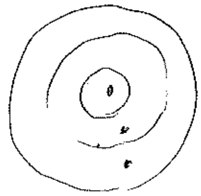
$2 \Rightarrow 3$ Sia $A \subset K$, infinito, tale che nessun pto limite di A sia in K. Allora $\forall\, p \in K \setminus A$, $\exists\, V_p$, intorno di p, tale che $V \cap A = \emptyset$ e $\forall\, q \in A$, $\exists\, W_q$, intorno di q tale che $W_q \cap A = \{q\}$ [nessun pto di A può essere pto di accumulazione].. Pertanto $\{V_p, W_q\}_{\substack{p \in K \setminus A \\ q \in A}}$



è un ricoprimento aperto di K, infinito (poichè A è infinito) e, togliendo uno dei W_q, $q \in K$ non viene più ricoperto: il ricoprimento (infinito) $\{V_p, W_q\}_{\substack{p \in K \setminus A \\ q \in A}}$ di K non ammette alcun sottoricoprimento finito. Ciò nega 2.

$3 \Rightarrow 1$ K è chiuso: sia p pto di accumulazione di K; considerando sfere concentriche

$B_{\frac{1}{i}}(P)$, $i = 1, 2 ..$ (per fissare le idee), otteniamo facilmente una successione $P_i \to P$, $(P_i \in K)$



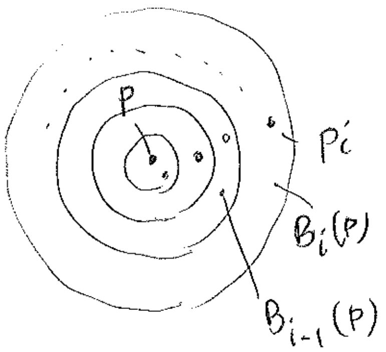
(con $P_i \in B_{\frac{1}{i}}(P) \setminus B_{\frac{1}{i+1}}(P)$).

$A := \{P_i\}$ è infinito, $A \subset K$ è ammette un (unico) pto di accumulazione, cioè P.

Ma allora $P \in K$. Dunque <u>K è chiuso.</u>

K è anche <u>limitato</u> poiché, in caso contrario, considerando sfere concentriche $B_i(P)$, si troverebbe una successione $\{P_i\}$, $P_1 \in B_1(P)$, $P_i \in B_i(P) \setminus B_{i-1}(P)$, $i \geq 2$

<u>senza pti limite</u>, violando 3. $\square$



★ **Teorema** Siano (X, τ_X), (Y, τ_Y) spazi topologici e sia $f: X \to Y$ continua. Se $K \subset X$ è compatto, allora $f(K)$ è compatto

[L'immagine di un compatto tramite una funzione continua è un compatto]

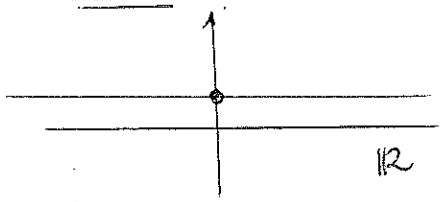
Di conseguenza, la nozione di compattezza è invariante per omeomorfismi, ovvero, è topologica:

★ spazi omeomorfi sono entrambi compatti o non lo sono

Dim. Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ un ricoprimento aperto di $f(K)$: $f(K) \subset \bigcup_{\alpha \in \Omega} U_\alpha$. In virtù della continuità di f, $f^{-1}(U_\alpha) \in \tau_X$ $\forall \alpha \in \Omega$, e $K \subset \bigcup_{\alpha \in \Omega} f^{-1}(U_\alpha)$, cioè $\tilde{\mathcal{U}} = \{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Omega}$ è un ricoprimento (aperto) di K; dalla compattezza di K si ha che $K \subset \bigcup_{\beta \in \mathcal{Y} \subset \Omega} f^{-1}(U_\beta)$, $\mathcal{Y}$ finito.

Ma allora $\{U_\beta\}_{\beta \in \mathcal{Y}}$ ricopre $f(K)$, e concludiamo. $\square$

⚠ Attenzione! La controimmagine di un compatto non è necessariamente compatta; basti pensare a



$f^{-1}(0) = \mathbb{R}$

un'applicazione continua che goda di tale proprietà si dice propria.

Diamo una dimostrazione del teorema per

$f: K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (f continua, K compatto);

meno generale ma istruttiva.

Se $f(K)$ è finito, è banalmente compatto. Altrimenti si consideri un insieme infinito $\{f(p_\alpha)\}$, $\alpha \in \Omega$

$p_\alpha \in K$, $f(p_\alpha) \in f(K)$. L'insieme $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ è certamente infinito e, in base alla compattezza di K, ammette un pto di accumulazione $p \in K$.

Sia allora $\{p_i\}_{i=1,2..}$, $p_i \to p$, una successione (estratta da $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$). La continuità di f implica

$f(p_i) \to f(p)$, sicché $\{f(p_\alpha)\}_{\alpha\in\Omega}$ ha un pto limite ($f(p)$) in $f(K)$. Pertanto $f(K)$ è compatto. □

☆ **Teorema** (Weierstraß) Sia $f: K \subset X \to \mathbb{R}$, continua, K compatto. Allora f ammette massimo e minimo assoluti in K.

Dim. $f(K)$ è compatto, dunque chiuso e limitato in $\mathbb{R}$. Siano $x_1 = \inf f(K)$, $x_2 = \sup f(K)$.

Esistono allora $p_1, p_2 \in K$ tali che $f(p_i) = x_i$, $i=1,2$

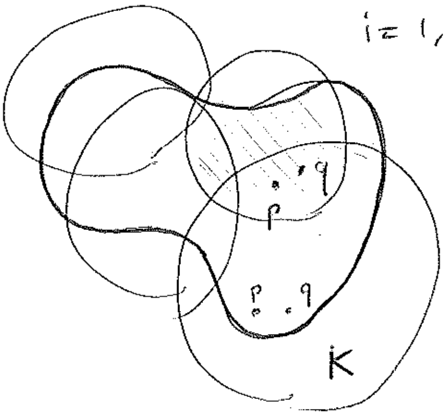
e pertanto si ha, necessariamente,

$$f(p_1) = x_1 \leq f(p) \leq x_2 = f(p_2) \quad \forall p \in K$$ □

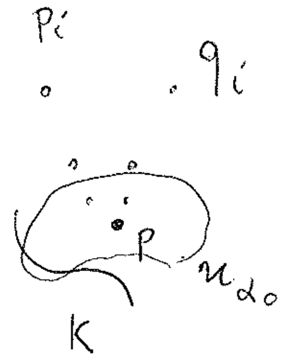
☆ <u>Numero di Lebesgue</u> di un ricoprimento.

Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto, e sia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ un ricoprimento di A (che può essere scelto <u>finito</u> per Heine-Pincherle-Borel). Allora esiste $\delta > 0$ tale che, se $d_E(p,q) < \delta$, allora p e q appartengono ad un qualche U_α.

<u>Dim.</u> Per assurdo, supponiamo che esistano $\{p_i\}$, $\{q_i\}$ $i = 1, 2 \ldots$, $p_i, q_i \in K$, in aperti diversi, tali che $d_E(p_i, q_i) \to 0$.



Dalla compattezza di K, le due successioni hanno un pto di accumulazione <u>comune</u> in K, sia p. Detto U_{α_0} l'aperto del ricoprimento contenente p, questo conterrà certamente almeno un p_i e un q_i (di fatto, <u>infiniti</u>...).



Tale $\delta > 0$ (o, meglio, il sup dei $\delta > 0$ con tale proprietà) è detto <u>numero di Lebesgue</u> del ricoprimento.

Tale nozione torna utile nel seguito.

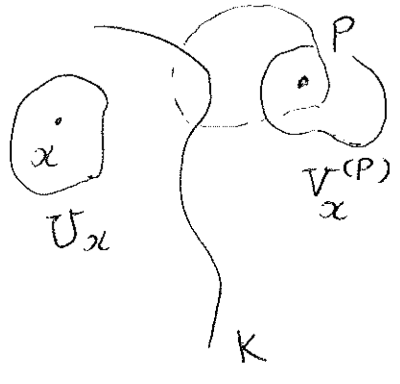
Proposizione 1. Sia $K \subset X$, K chiuso, X compatto. Allora K è compatto.

2. Sia X di Hausdorff, $K \subset X$, K compatto. Allora K è chiuso

⚠ Notiamo che 2 non vale in generale se si rimuove la condizione "X di Hausdorff": sia $X = \{a, b\}$, τ: topologia banale. Si ha: X non è di Hausdorff, $\{a\}$ è compatto, ma non è chiuso.

Dim. 1. Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ un ricoprimento aperto di K. Essendo K chiuso, $X \setminus K$ è aperto e $\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} U_\alpha \cup (X \setminus K) = X$. Dalla compattezza di X si trae che $X = U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \dots \cup U_{\alpha_n} \cup (X \setminus K)$ per un numero finito di aperti di $\mathcal{U}$, opportuni. Ma ciò implica che $K \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$ e, pertanto, K è compatto.

2. Mostriamo che $X \setminus K$ è aperto. Sia $p \in X \setminus K$ fissato. $\forall x \in K$, $\exists$ intorni $U_x \ni x$, $V_x^{(p)} \ni p$, disgiunti (X è Hausdorff)



(⚠ non è detto che $V_x^{(p)} \cap K = \emptyset$)

<u>Più rapidamente</u> : $(f^{-1})^{-1}(C_i) = f(C_i)$ mostra che f è un'applicazione <u>chiusa</u> (manda cioè <u>chiusi</u> in <u>chiusi</u>) e, essendo bigettiva, aperta (<u>aperti</u> in <u>aperti</u>) $\dagger$
ed è pertanto un <u>omeomorfismo</u> (v. Lezione I)

<u>Esempi</u>

- In $\mathbb{R}^n$, si consideri $B_\delta(x_0)$, $\delta > 0$:

  $B_\delta(x_0)$ non è <u>compatta</u> (infatti <u>non</u> è chiusa, anche se è limitata).
  Si osservi che
  $$\mathcal{U} = \{ \underbrace{B_{\delta'}(x_0)}_{\mathcal{U}_{\delta'}} \}_{0<\delta'<\delta}$$
  fornisce un <u>ricoprimento</u> aperto di $B_\delta(x_0)$ da cui <u>non è possibile</u> estrarre alcun sottoricoprimento <u>finito</u>.

- S^n, $n \geq 0$ $\left(S^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \,/\, \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \} \right)$
  Sfera unitaria in $\mathbb{R}^{n+1}$
  è <u>compatta</u>

- $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ $(n \geq 0)$ (Spazio proiettivo reale n-dimensionale)

  è <u>compatto</u> (la mappa <u>antipodale</u> naturale $f : S^n \to \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ è <u>continua</u> e <u>suriettiva</u>)

- $\mathbb{T}^n := S^1 \times S^1 \times \ldots S^1$ è <u>compatto</u>
  toro n-dimensionale (per il teorema di <u>Tychonoff</u>:
  un. <u>prodotto</u>(+) di spazi topologici compatti (munito della topologia prodotto) è compatto.

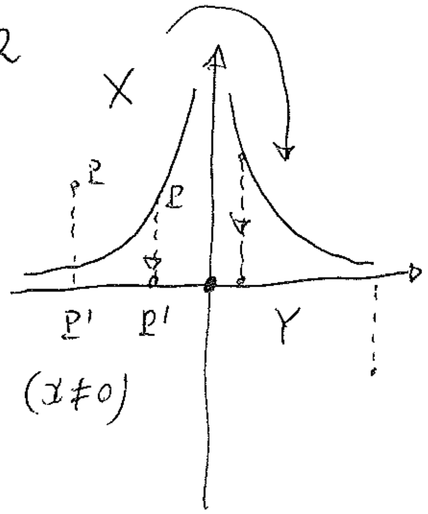
  (+) arbitrario

† Nota

$$f : \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\parallel}{X}} \to \underset{\mathbb{R}}{\underset{\parallel}{Y}}$$

$P \mapsto P'$

$(x, y) \mapsto x \quad (x \neq 0)$



$A =$  è chiuso

$Y = \mathbb{R}$

$y = \frac{1}{|x|}$

$x \neq 0$

f è aperta ma non è chiusa

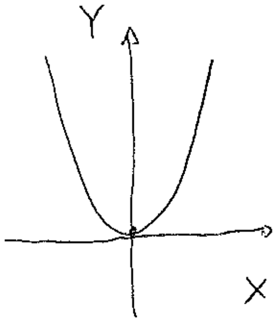
(A è chiuso ma $f(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ non lo è).

$X' = A$ (topol. relativa)

Ma se $f : X' \to Y'$ $\quad Y' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

f diviene un omeomorfismo $\left[f^{-1}(x) = \left(x, \frac{1}{|x|}\right) \right]$

◇ ◇ ◇



$$f : \underset{\mathbb{R}}{\underset{\parallel}{X}} \to \underset{\mathbb{R}}{\underset{\parallel}{Y}} \qquad x \mapsto x^2$$

è chiusa ma non è aperta:

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$!

che non è aperto

$$O(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ A^t A = A A^t = I_n \}$$

gruppo ortogonale è compatto

Infatti se $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots n \\ j=1,\dots n}} \in O(n)$, è

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} \quad i,j = 1 \dots n \qquad (AA^t = A^t A = I_n)$$

che è una condizione "chiusa" in $\mathbb{R}^{n^2}$

(il complementare di $O(n)$ in $M_n(\mathbb{R})$ è chiaramente aperto).

Inoltre, da $A^t A = I_n$ si trae $tr(A^t A) = n$,

ossia $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = n$, che ne mostra la limitatezza

$\|A\|_{HS}^2 = 1$

★ Digressione Siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

Definiamo $\langle A, B \rangle_{HS} := Tr(A^t B)$

★ prod. scalare di Hilbert-Schmidt [mostrare che è effettivamente un prodotto scalare!]

$A^t = (a^t)_{ij}$

Esplicitamente: $(A^t B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a^t_{ik} b_{kj} =$

$= \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{kj}$. Da $Tr\, C = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$ si ha

$$Tr(A^t B) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ki} b_{ki}$$

(è eff. il prod scalare standard in $\mathbb{R}^{n^2}$)

☆ Sia $\mathcal{H} = l^2 = \{x = \{x_i\} \mid x_i \in \mathbb{C},\ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$
spazio di Hilbert

$$\langle x \mid y \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} \bar{x}_i y_i \qquad \text{prodotto scalare}$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \bar{x}_i x_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2} \qquad \text{norma}$$

$$d(x, y) := \|x - y\| \qquad \text{distanza}$$

$\mathcal{H}$ è uno sp. metrico <u>completo</u>.

$\mathcal{H}_1 \equiv$ sfera unitaria $= \{x \in l^2 \mid \|x\| = 1\}$

★ $\mathcal{H}_1$ è <u>chiuso</u> e <u>limitato</u> ma non è <u>compatto</u>!

Sia infatti $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow i$ la base ortonormale canonica. $\{e_i\}$ è una successione <u>limitata</u> da cui non si può estrarre alcuna <u>sottosuccessione convergente</u>, in quanto

$$\|e_i - e_j\|^2 = \ldots = \|e_i\|^2 + \|e_j\|^2 = 2$$

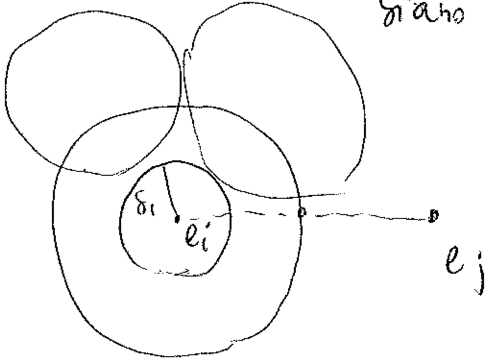
(equivalentemente, è un insieme infinito di $\mathcal{H}_1$ che <u>non possiede</u> pti <u>di accumulazione</u>)

[nota: per gli spazi metrici la compattezza per successioni (v. nota al pto 3 del teorema) è equivalente ad HEB]

Vediamolo anche così:

Siano $\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\delta_1 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

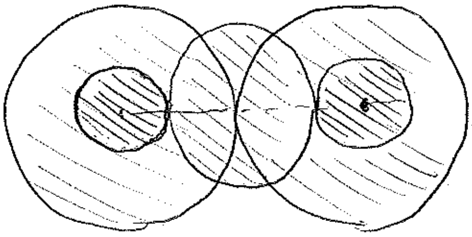
$$\delta = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\|e_i - e_j\|}{2}$$



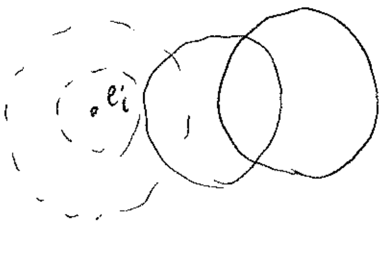
consideriamo un ricoprimento aperto di $\mathcal{H}$ composto dalle sfere $B_\delta(e_i)$, $i=1,2\dots$

e da altri aperti non intersecanti $B_{\delta_1}(e_i)$

Da questo viene indotto un ricoprimento aperto di $\mathcal{X}_1$, ovviamente infinito.



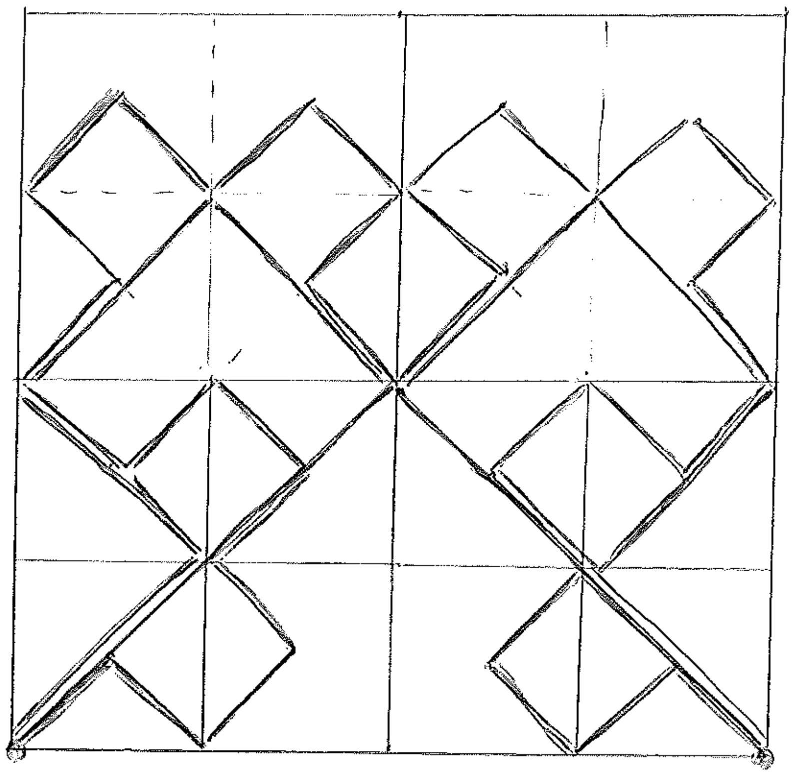
Ma da un ricoprimento siffatto non può essere estratto alcun ricoprimento finito: rimuovendo una $B_\delta(e_i)$, e_i non è contenuto in nessun altro aperto del ricoprimento



☆ Curva di Peano (cenno)

$$p = p(t) \qquad t \in [0,1] \equiv I$$

$$= \lim p_n(t)$$



si dimostra che
★ p è continua, pertanto

$p(I)$ è compatto in $I \times I$, dunque chiuso, e chiaramente

$p(I)$ è densa in $I \times I$.

Pertanto

$$p(I) = \overline{p(I)} = I \times I$$

vale a dire:

"la curva di Peano riempie un quadrato"

Ora $K \subset \bigcup_{x \in K} \bar{U}_x$ e, pertanto, in virtù della sua compattezza, è $K \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \dots U_{x_n}$ per certi $x_i \in K$, $i = 1, 2 .., n$. Sia

$V^{(p)} := V_{x_1}^{(p)} \cap V_{x_2}^{(p)} \cap \dots \cap V_{x_n}^{(p)}$: $V^{(p)}$ è aperto (intersezione finita di aperti), e necessariamente $V^{(p)} \subset X \setminus K$. Dunque $\forall p \in X \setminus K$, $\exists V^{(p)} \ni p$, aperto, $V^{(p)} \subset X \setminus K$; pertanto

$X \setminus K = \bigcup_{p \in X \setminus K} V^{(p)}$, epperò è aperto. $\square$

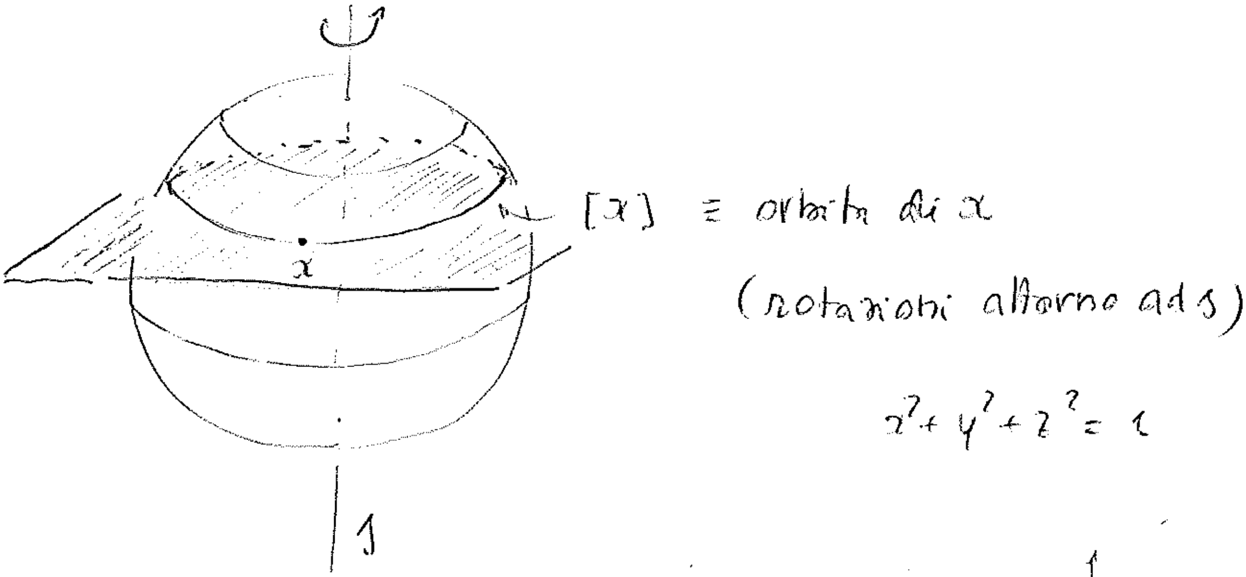
* Teorema Siano X, Y spazi topologici, X compatto, Y di Hausdorff, $f : X \to Y$ continua e iniettiva.
Allora $f : X \to f(X)$ è un omeomorfismo

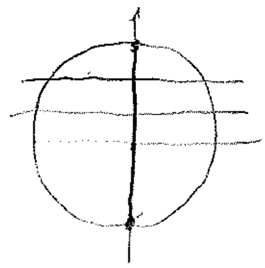
Dim. f^{-1} esiste. Dimostriamo che è continua.

Sia $C \subset X$ un insieme chiuso. Poichè X è compatto, C è pure compatto.

$(f^{-1})^{-1}(C) = f(C)$, che è compatto (continuità di f), e chiuso (Y è di Hausdorff), sicchè la controimmagine (tramite f^{-1}) di un chiuso è un chiuso (e la controimmagine di un aperto è un aperto), da qui la continuità di f^{-1}.

Applicazione (esempio di spazio di orbite)





$$f : S^2/_{\sim} \longrightarrow [-1,1]$$

(definizione ovvia)

è una biezione continua, $S^2/_{\sim}$ è compatto (lo è S^2) e $[-1,1]$ è di Hausdorff, sicché f è un omeomorfismo.

$$S^2/_{\sim} \approx [-1,1]$$

Ulteriori esempi ed esercizi sulla **Compattezza**

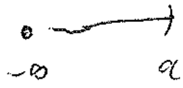
ADDENDUM

☆ Sia $X = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

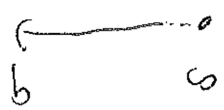
$\equiv [-\infty, +\infty]$

$\mathcal{T}$: aperti usuali e $\{-\infty\} \cup (-\infty, a)$

$\equiv [-\infty, a)$



e $\{+\infty\} \cup (b, +\infty) \equiv (b, +\infty]$

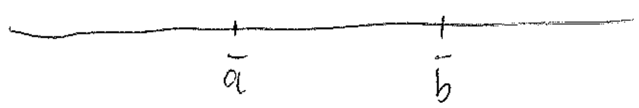


X è compatto : Sia dato un qualsiasi ricoprimento aperto

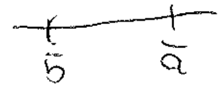
$X = \bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathcal{U}_\alpha$ Siano $\mathcal{U}_{\bar{\alpha}} \ni -\infty$,

$\mathcal{U}_{\bar{\beta}} \ni +\infty$

$\Rightarrow \mathcal{U}_{\bar{\alpha}} = [-\infty, \bar{a})$, $\mathcal{U}_{\bar{\beta}} = (\bar{b}, +\infty]$

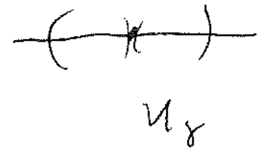


Se $\bar{a} > \bar{b}$, $X = \mathcal{U}_{\bar{\alpha}} \cup \mathcal{U}_{\bar{\beta}}$

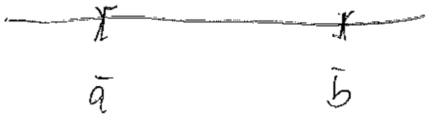


Se $\bar{a} = \bar{b}$, $\exists\ \mathcal{U}_\gamma \ni \bar{a} = \bar{b}$

$\Rightarrow X = \mathcal{U}_{\bar{\alpha}} \cup \mathcal{U}_{\bar{\beta}} \cup \mathcal{U}_\gamma$



Se $\bar a < \bar b$, $\quad [\bar a, \bar b] \subset \bigcup_{\beta \in Y} U_\beta$ finito



essendo compatto (in $\mathbb{R}$)

$$\Rightarrow \quad X = U_{\bar\alpha} \cup U_{\bar\beta} \cup \bigcup_{\beta \in Y} U_\beta$$

★ Se invece prendiamo

$$Y = (-\infty, +\infty],$$

è facile verificare che non è compatto:

se $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \qquad U_n = (-n, +\infty]$

da $\{U_n\}$ non si può estrarre alcun sottoricoprimento finito

★ Sia $X = \mathbb{R}$, per fissare le idee.

Sia τ la topologia che ha per chiusi ϕ, X e i sottoinsiemi finiti di $\mathbb{R}$ (topologia cofinita)

Essa non è, evidentemente, di Hausdorff

È però una topologia compatta:

Sia dato un ricoprimento aperto di X: $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$

Sia $\mathcal{U}_{\bar\alpha} \ni 0$ (per fissare le idee)

Allora $\mathbb{R} \setminus \mathcal{U}_{\bar\alpha} = \mathcal{F}$ insieme finito.

Siano $\mathcal{U}_{\alpha_i}$, $i=1\dots n$ aperti contenenti i punti (n) di $\mathcal{F}$. Allora $X=\mathbb{R} = \mathcal{U}_{\bar\alpha} \cup \mathcal{U}_{\alpha_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{\alpha_n}$.

☆ $X = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\mathcal{T}$: aperti usuali e i complementari degli intervalli chiusi e limitati, cui si aggiunge ∞

Si ottiene uno sp. topologico compatto e di Hausdorff. È un caso particolare della <u>compattificazione a un punto</u> (one-point compactification) di Alexandrov.

Geometricamente si ottiene tramite una proiezione stereografica