Lezione VIII

Analisi Matematica I
a.a. 2007/08
Bioinformatica
Prof. M Spera

★ Sulla risoluzione numerica di equazioni

★★ Teorema di Banach – Caccioppoli (caso particolare)

Sia $g : [a,b] \to [a,b]$ derivabile in $[a,b]$, con $|g'(x)| \le k \quad 0 \le k < 1$ (*)

Allora $\exists!$ pto fisso ξ di g in $[a,b]$:

$$g(\xi) = \xi$$

(*) g è una contrazione
$|g(x) - g(y)| < |x - y|$
(.. Lagrange..)

e la successione definita da

approssimazioni successive (Peano – Picard)

$$\boxed{x_{n+1} = g(x_n)} \quad , x_0 \in [a,b]$$

converge a ξ indipendentemente da $x_0 \in [a,b]$

Dim. 1) unicità di ξ

Siano ξ, η, $\xi \neq \eta$ due pti fissi

$$\xi - \eta = g(\xi) - g(\eta) = g'(c)(\xi - \eta)$$

(Lagrange)

$$\Rightarrow \quad |\xi - \eta| = |g'(c)||\xi - \eta| \le k|\xi - \eta| < |\xi - \eta| \; :$$

assurdo se $\xi \neq \eta$.

2) Esistenza di ξ. Basterà mostrare che $\{x_n\}$ è di Cauchy, per la completezza di $\mathbb{R}$

Se $\xi = \lim_{n \to \infty} x_n$, si ha ($g$ è continua ..)

$$\xi = g(\xi) \qquad \text{cioè } \xi \text{ è pto fisso}$$

(necessariamente unico)

Si ha facilmente (Lagrange..)

$$|x_{n+1} - x_n| \le k\,|x_n - x_{n-1}|$$

$$\Rightarrow \quad |x_{n+1} - x_n| \le k^n\,|x_1 - x_0|$$

e, inoltre (dis. triangolare)

$$|x_{n+p} - x_n| \le \underbrace{|x_{n+p} - x_{n+p-1}|}_{\le\, k^{n+p-1}|x_1 - x_0| \ \dots\text{ etc}} + \dots |x_{n+1} - x_n|$$

$$\le k^n\left(k^{p-1} + k^{p-2} + \dots + 1\right)|x_1 - x_0|$$

$$= \frac{1-k^p}{1-k}\,k^n\,|x_1 - x_0| < \underbrace{\frac{k^n}{1-k}}_{A}\,|x_1 - x_0|$$

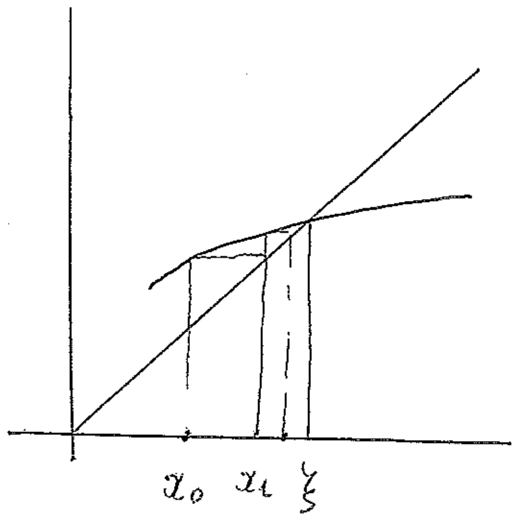
ora $A \to 0$ se $n \to \infty$

$\Rightarrow$ $\{x_n\}$ è di Cauchy e si conclude $\square$

Commento. Se nella precedente disuguaglianza $p \to \infty$, si ha

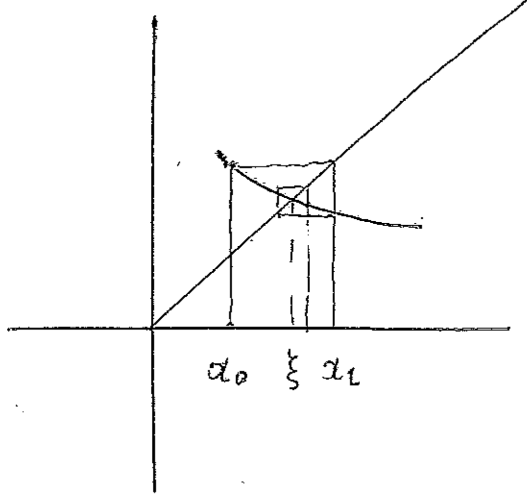
$$|\xi - x_n| < \frac{k^n}{1-k}\,|x_1 - x_0|$$

(è stima l'errore commesso arrestandosi al termine n-esimo ...)



(già discusso vedi Esempio 5)

$x_n \to \xi$ monotonicamente



$\{x_n\}$ "oscilla" attorno a ξ

L'iterazione di Newton - Raphson

(metodo della tangente variabile)

(È un caso particolare della teoria del pto fisso)

Si voglia determinare una soluzione ξ di

$$f(x) = 0$$

(supponiamo $f \in C^2 \ldots$)

Euristicamente procediamo così:

Assumendo l'esistenza di ξ,

sia x_n una sua approssimazione.

Vogliamo migliorarla.

Sia $\xi = x_n + h$

$$\Rightarrow \quad f(x_n + h) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\text{Taylor} \ldots)$$

$$f(x_n) + h\, f'(x_n) \cong 0$$

$$\Rightarrow \quad h = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (\text{assunta} \neq 0)$$

$\Rightarrow$ consideriamo

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

[Check: se $x_n \to \xi$ si ha

effettivamente

$$\xi = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)} \qquad (\text{si pone } f' \neq 0..)$$

$\Rightarrow \quad f(\xi) = 0$]

→ Tale metodo rientra nello schema precedente

$$\text{con} \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

e (, in un intervallo $[a,b]$)

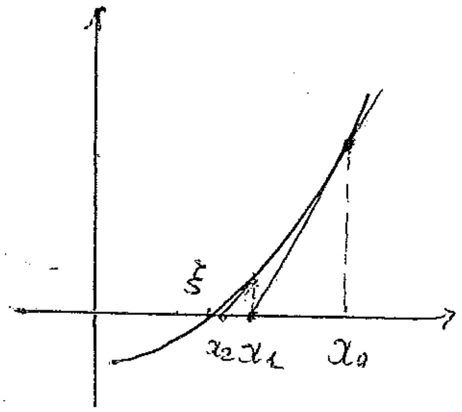
$$|g'(x)| = \left| 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| = \left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| < 1$$

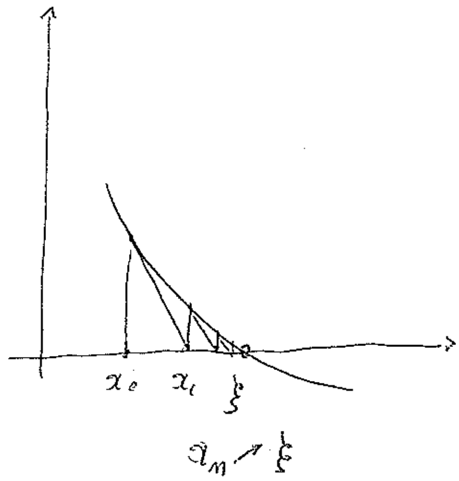
Da ciò si vede che il metodo è "generalmente convergente" $|f(x)|$ è "piccolo" in un intorno di ξ..

ma fallisce ↯ se ξ è radice "multipla" di f

ovvero $f'(\xi) = 0$ ...

*** Interpretazione geometrica del metodo di Newton - Raphson





Eq. retta tangente in $(x_n, f(x_n))$

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

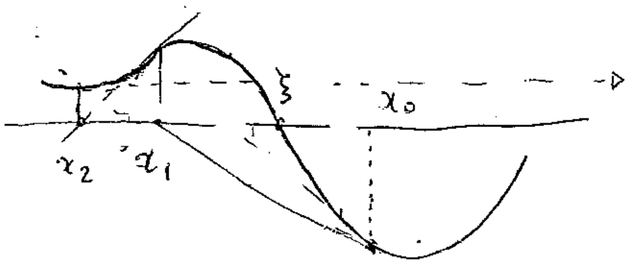
☆ intersechiamo con $y = 0$ (asse x)

$$\Rightarrow \quad x - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Rightarrow \quad x \equiv x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

notare: se f è str. convessa (ex. se $f'' > 0 \Rightarrow f'$ crescente)

$\{x_n\}$ è str. crescente o decrescente



Esempio. calcolo di $\sqrt{\ }$

(1) Sia $\alpha = N^2 + x$ si ha:

$$\sqrt{\alpha} = \sqrt{N^2+x} = \sqrt{N^2\left(1+\frac{x}{N^2}\right)} = N\sqrt{1+\frac{x}{N^2}}$$

$$= N\left(1+\frac{x}{2N^2}+\dots\right) = N + \frac{x}{2N} + \dots$$

* f. binomiale ..

(1') (Da $f(x) - f(x_0) \simeq f'(x_0)(x-x_0)$

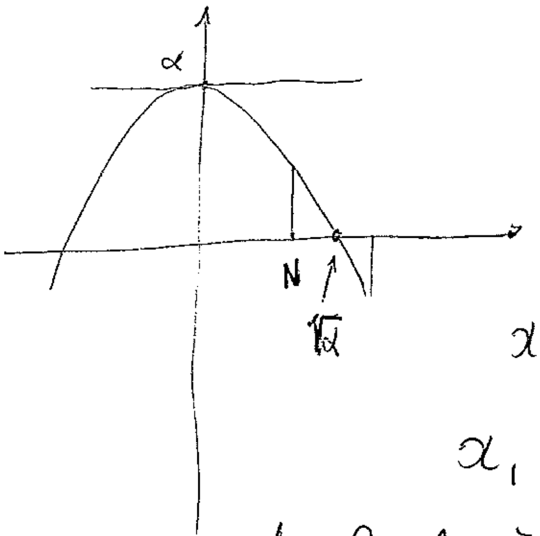
si ha $\sqrt{\alpha} - N \simeq \dfrac{1}{2\sqrt{N^2}} \cdot x = \dfrac{1}{2N} x$)

(2) * Metodo di Newton

Sia $f(x) = \alpha - x^2$ $\qquad f'(x) = -2x$

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\alpha - x^2}{-2x}$$

$$= x + \frac{\alpha - x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}$$



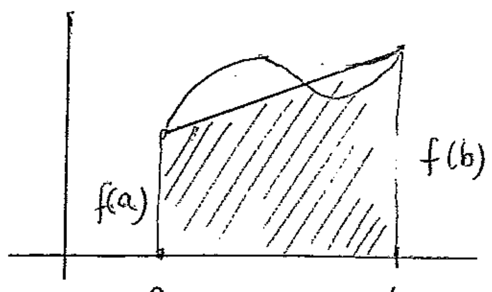
$$x_n = x_{n-1} + \frac{\alpha - x_{n-1}^2}{2} \cdot \frac{1}{x_{n-1}}$$

$x_0 = N$

$$x_1 = x_0 + \frac{\overbrace{\alpha - x_0^2}^{\Delta}}{2} \cdot \frac{1}{x_0} = N + \frac{\Delta}{2N}$$

* Questo è essenzialmente l'algoritmo che si insegnava (...) nelle scuole medie inferiori (dovuto a Teone di Smirne)

Calcolo approssimato di integrali definiti



la formula dei trapezi

Sia $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$. Da

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a} + (x-a)(x-b)\,\frac{f''(\xi)}{2}$$

si ha, integrando

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overbrace{(b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}}^{\text{area trapezio tratteggiato}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,f''(\xi(x))\,dx}_{E}$$

$$E = \frac{1}{2}\,f''(\eta)\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx \qquad \text{(t. della media integrale)}$$

$$= -\frac{1}{2}\,f''(\eta)\,\frac{(b-a)^3}{3!}$$

$\Rightarrow$ se $|f''| \leq M$

$$|E| \leq \frac{M(b-a)^3}{12}$$

Dividendo in n parti uguali e applicando ripetutamente la formula dei trapezi

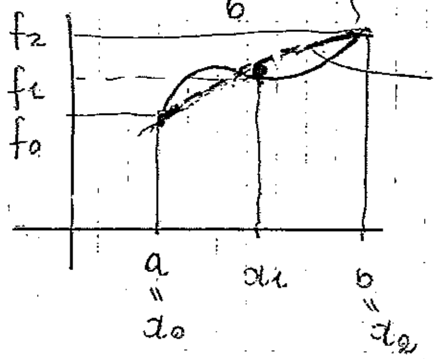
si ha:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{b-a}{n}\left(\frac{f_0+f_n}{2}+f_1+\dots f_{n-1}\right)}$$

e $|E| \leq M \dfrac{(b-a)^3}{12n^2}$

☆ <u>Formula</u> di <u>Cavalieri</u> - <u>Simpson</u>

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{b-a}{6}\left(f_0+4f_1+f_2\right)$$



<u>arco di parabola</u> <u>interpolante</u> f_0, f_1, f_2

Dividendo in n parti uguali $[a,b]$ e applicando ripetutamente C. S.
si giunge alla seguente stima dell'errore

$$|E| \le \frac{(b-a)^5}{2880\, n^4} M$$

$$(\ldots \text{con} \quad |f^{(4)}| \le M \ )$$

In generale, si hanno le

☆ formule di Cotes

l'interpolazione avviene tramite i polinomi di Lagrange. Essi si costruiscono nel modo seguente:

Siano $x_1, x_2 \ldots x_n$ "pti d'appoggio"
e $y_i = f(x_i) \qquad i=1,2,\ldots,n$

Poniamo

$$F(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$$

$$F_k(x) = \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^{n} (x - x_r)$$

È $F_k(x_k) = \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^{n} (x_k - x_r)$

Poniamo:

☆ $$L_k(x) = \frac{F_k(x)}{F_k(x_k)} \qquad \text{(è di grado } n-1)$$

Si ha: $L_k(x_r) = \delta_{kr}$

Poniamo infine

$$\boxed{P(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k L_k(x)}$$

→ polinomio di Lagrange ($\text{gr } P = n-1$)

interpola $y_1 \ldots y_n$

L'approssimazione migliora al crescere di n.

→ Formule di Gauss - Legendre (cenno)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \underset{\text{coefficienti opportuni}}{B_k}\, f(x_k)$$

→ i pti d'appoggio non sono equidistanti

e sono scelti in modo ... astuto

Risultano essere essenzialmente gli zeri dei

→ polinomi di Legendre

→→ Tali formule sono estremamente efficienti

e ben più efficaci delle formule di Cotes..

Forma integrale del resto nella formula di Taylor

Complementi vari

$f \in \mathcal{C}^n((a,b)) \qquad x_0 \in (a,b)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$$

con $$\boxed{R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt}$$

La dim. si ottiene per induzione: è vera per $n=1$ (è il t. f. c.). Il passaggio da n a $n+1$ si ottiene integrando per parti ...

Osserviamo che un'applicazione del teorema della media integrale (generalizzato) conduce alla forma di Lagrange (Perché?)

$\Rightarrow$ a priori questa formula è migliore

Osserviamo ancora che

$$f'(x) = f'(x_0) + (x-x_0) f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(x_0) + r_n(x)$$

$\Rightarrow$ integrando tra x_0 e x si ha

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \dots + \underbrace{\int_{x_0}^{x} r_n(t)\,dt}_{= R_n(x)}$$

Di nuovo, tale forma può essere più efficace di quella di Lagrange

*** Inoltre permette di ottenere sviluppi di Taylor in modo "indiretto", senza calcolo di derivate e senza passare dalla teoria delle serie di potenze

Esempi

$$1+x+x^2+\dots x^{n-2} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n-1}}{1-x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 \dots + (-1)^n x^{n-2} + \frac{(-1)^{n+1}x^{n-1}}{1+x}$$

$\Rightarrow \quad (x > -1)$ pol. di McLaurin

$$\log(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + \underbrace{(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt}_{R_n(x)}$$

Analogamente: da $\frac{1}{1+x^2}$ si ha ...

$$\boxed{\operatorname{arctg} x = \underbrace{x - \frac{x^3}{3} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-3}}{2n-3}} + R_{2n-2}(x)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{-1/2}{k} x^k + r_n(x)$$

$$\binom{-1/2}{k} x^k = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k$$

$$\boxed{\begin{aligned}(2k-1)!! &:= 1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2k-1)\\ (2k)!! &:= 2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2k\end{aligned}}$$

Se $x \mapsto -x$ e quindi $\mapsto -x^2$

troviamo $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \dots$ e integrando

$$\boxed{\arcsin x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} + R_{2n}(x)}$$

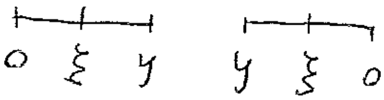
✦ Calcolare $\boxed{\int_0^1 e^{-x^2}\,dt}$

a meno di 10^{-2} (Stesso esercizio per $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$)

✦ Le integrande non hanno primitiva elementare!

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \dots \frac{y^n}{n!} + \frac{e^{\xi} y^{n+1}}{(n+1)!}$$

Mc Laurin



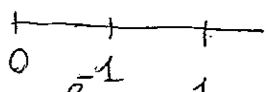
Se $-x^2 = y$ è

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \overbrace{\frac{e^{\xi} x^{2(n+1)}}{(n+1)!}}^{R_n}$$

$$= \int_0^1 e^{-x^2} = 1 - \frac{1}{3} + \dots \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)} +$$

$$+ \int_0^1 R_n\,dx \qquad \text{Ma} \quad \left| \int_0^1 R_n(x)\,dx \right| \le$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)!}\,dx = \frac{1}{(n+1)!\,(2n+3)} < 10^{-2}$$ per $n \geq 3$



4 Sul calcolo approssimato

Sia $a = a' + \Delta a$ approssimazione, errore

$b = b' + \Delta b$

Allora $|a+b-(a'+b')| \le |\Delta a| + |\Delta b|$

$\Rightarrow$ se $|\Delta a| < \frac{1}{10^n}$, $|\Delta b| < \frac{1}{10^n}$ $\Rightarrow$ $|\Delta a| + |\Delta b| < \frac{1}{10^{n-1}}$

$\left(\frac{2}{10^n} < \frac{1}{10^{n-1}} \right)$

Es: $\boxed{f(x) = P_n(x) + R_n(x)}$

Pol. di Taylor, Resto

$P_n(x) = a = \underbrace{a' + \Delta a}$ approssimazione

$|R_n| = |\Delta b| < \frac{1}{10^N}$ e $|\Delta a| < \frac{1}{10^N}$

è $|f(x) - a'| < \frac{1}{10^{N-1}}$

Es: $\sin 1 = \underbrace{1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}}_{\text{lo calcolo a meno di } 10^{-(N+1)}} + \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}$

$|\bigcirc| \le \frac{1}{[2(n+1)]!} < 10^{-(N+1)}$

$\Rightarrow$ calcolo $\sin 1$ con un errore $< 10^{-N}$