Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2010/2011

Algebra Lineare ed Elementi di Geometria

Programma svolto nel Modulo **Algebra Lineare**

0. Introduzione al linguaggio matematico

§1. Insiemi

1.1 Esempi

1.2 Come si denota un insieme

1.3 Altri esempi

1.4 Sottoinsieme, sottoinsieme proprio

1.5 Principio di doppia inclusione

1.6 Esempi

1.7 L'insieme delle parti

1.8 Esempi

1.9 Teorema: se M ha n elementi, l'insieme delle parti ne ha 2^n.

1.10 Unione, intersezione, differenza, complemento, prodotto cartesiano

1.11 Esempi

1.12 Alcune proprietà

(*vedi anche* Precorso on-line, LEZIONI: Capitolo Insiemi)

§2. Tecniche dimostrative

2.1 Dimostrazioni e controesempi

2.2 Gli assiomi di Peano

2.3 Principio di induzione

2.4 La somma dei primi n numeri naturali

2.5 Dimostrazione del Teorema 1.9

(*vedi anche* [GS, Appendice B])

§3. Numeri complessi

3.1 Il campo $\mathbb{C}$

3.2 Numeri immaginari

3.3 Forma algebrica di un numero complesso

3.4 Coniugato e modulo

3.5 Esempio

3.6 Coordinate polari

3.7 Forma trigonometrica di un numero complesso

3.8 Prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica

3.9 La Formula di De Moivre

3.10 Definizione: radici n-esime

3.11 Teorema sulle radici n-esime

3.12 Esempio: Divisione del cerchio

3.13 Esempio

3.14 Teorema Fondamentale dell'Algebra

(*vedi anche* [GS, Appendice A])

I. Matrici e sistemi lineari

§4. Matrici e loro operazioni

4.1 Esempio

4.2 Definizioni

4.3 Esempi

4.4 Somma di due matrici

4.5 Moltiplicazione di una matrice per uno scalare

4.6 Prodotto di due matrici

4.7 Altri esempi

(*vedi* [GS, Capitolo I])

§5. Sistemi lineari e matrici

5.1 Esempi

5.2 Operazioni elementari

5.3 Metodo di eliminazione di Gauss (EG)

5.4 Risoluzione di un sistema lineare

5.5 Esempio

5.6 Rango di una matrice

5.7 Matrici elementari

§6. Matrici inverse

6.1 Lemma e Definizione
6.2 Esempi
6.3 Proposizione (sistemi lineari equivalenti)
6.4 Proposizione
6.5 Proposizione
6.6 Teorema (esistenza dell'inversa destra)
6.7 Definizione di H-trasposta
6.8 Teorema (esistenza dell'inversa sinistra)
6.9 Corollario (matrici invertibili)
6.10 Calcolo della matrice inversa. Esempio

(*vedi* [GS, Capitolo I])

§7. Decomposizione LU

7.1 Definizione di matrice triangolare inferiore /superiore
7.2 Proposizione
7.3 Esempio
7.4 Lemma
7.5 Teorema
7.6 Esempi

(*vedi* [GS, Capitolo I])

II. Spazi vettoriali

§8. Spazi vettoriali e basi

8.1 Gruppo
8.2 Campo
8.3 Spazio vettoriale
8.4 Esempi
8.5 Proposizione
8.6 Combinazioni lineari
8.7 Esempi
8.8 Insieme di generatori, base
8.9 Esempi
8.10 Spazi vettoriali finitamente generati
8.11 Esempi

(*vedi* [GS, Capitolo II])

§9. Dipendenza e indipendenza lineare

9.1 Definizione di indipendenza lineare

9.2 Osservazione: base = insieme di generatori linearmente indipendente

9.3 Esempi

9.4 Caratterizzazione di dipendenza lineare

9.5 Esempi

9.6 Proposizione

9.7 Caratterizzazioni di una base

9.8 Proposizione

(*vedi* [GS, Capitolo II])

§10. Dimensione di uno spazio vettoriale

10.1 Esistenza della base.

10.2 Teorema di Steinitz

10.3 Corollario

10.4 Dimensione.

10.5 Esempi

10.6 Teorema: completamento della base

10.7 Proprietá di uno spazio vettoriale di dimensione n

10.8 Esempi

(*vedi* [GS, Capitolo II])

§11. Sottospazi di uno spazio vettoriale

11.1 Definizione di sottospazio

11.2 Esempi

11.3 Un sottospazio di V coincide con V se e solo se ha la stessa dimensione.

11.4 L'intersezione di due sottospazi

11.5 Esempio (unione di sottospazi)

11.6 La somma di due sottospazi

11.7 Formula di Grassmann

11.8 Somma diretta di due sottospazi

11.9 Esempi e osservazioni

(*vedi* [GS, Capitolo II])

§12. Applicazioni lineari

12.1 Definizione

12.2 Alcune proprietà

12.3 Esempi

12.4 Lemma

12.5 Teorema: Ogni spazio vettoriale su K di dimensione n è isomorfo a K^n.

12.6 Definizione

12.7 Corollario: due spazi vettoriali sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

12.8 Lemma: composizione di applicazioni lineari

12.9 nucleo e immagine

12.10 Esempi

12.11 Teorema (nullità + rango)

12.12 Corollario

(*vedi* [GS, Capitolo II])

§13. Quattro spazi associati a una matrice

13.1 Lemma

13.2 L'applicazione $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $x \mapsto Ax$ associata a $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

13.3 Lemma

13.4 Teorema sul rango

13.5 Corollario

13.6 Osservazione su A^H

13.7 Teorema dei quattro sottospazi: $\mathbb{K}^m = C(A) \oplus N(A^H)$ e $\mathbb{K}^n = C(A^H) \oplus N(A)$

13.8 Esempio

13.9 Procedimento per determinare basi di $C(A)$ e $N(A)$

13.10 Teorema di Rouché - Capelli

13.11 Teorema: le soluzioni di Ax=b sono i vettori di forma $p + u$ con $u \in N(A)$

13.12 Esempi

13.13 Procedimento per la risoluzione di un sistema lineare

(*vedi* [GS, Capitolo II])

§14. Applicazioni lineari e matrici

14.1 Lo spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$

14.2 Osservazioni

14.3 La matrice associata a un'applicazione lineare rispetto alla base canonica

14.4 Esempi

14.5 Teorema: $M_{m\times n}(\mathbb{K}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$

14.6 Esempi

14.7 La matrice del cambiamento di base $\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$

14.8 La matrice associata a un'applicazione lineare $f : V \to W$ rispetto alle basi $\mathcal{B}(V)$ e $\mathcal{B}(W)$

14.9 Esempio

14.10 Teorema sul cambiamento di basi

14.11 Corollario

14.12 Matrici simili

(*vedi* [A, Capitoli 7 e 8], [GS, Capitolo II])

III. Il determinante

§15. Il determinante di una matrice quadrata

15.1 Definizione (per ricorrenza)

15.2 Regola di Sarrus

15.3 Seconda definizione (assiomatica)

15.4 Altre proprietà

15.5 Corollario

15.6 Teorema di Binet

15.7 Corollario: una matrice quadrata A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

15.8 Corollario: $\det A = \det A^T$

15.9 Teorema di Laplace

15.10 Teorema di Cramer

15.11 Calcolo della matrice inversa (secondo metodo)

15.12 Determinante a blocchi

(*vedi* [A, Capitolo 9], [GS, Capitolo IV])

IV. Autovalori e autovettori

§16. Gli autovalori di una matrice

16.1 Definizione di autovalore e autovettore

16.2 Esempi

16.3 Osservazione

16.4 Definizione di polinomio caratteristico.

16.5 Teorema

16.6 Corollario: A possiede n autovalori (non necessariamente reali, né necessariamente distinti)

16.7 Autospazi e molteplicità algebriche e geometriche

16.8 Esempi

16.9 Proprietà del polinomio caratteristico

§17. Diagonalizzazione di una matrice

17.1 Osservazione

17.2 Definizione: matrici diagonalizzabili

17.3 Teorema sulla diagonalizzazione.

17.4 Esempi

17.5 Proprietà delle matrici simili.

17.6 Corollario

17.7 Esempio

§18. Criteri di diagonalizzazione

18.1 Lemma sugli autospazi

18.2 Corollario: $A \in M_{n\times n}$ è diagonalizzabile se possiede n autovalori distinti.

18.3 Lemma sulle molteplicità

18.4 Teorema: $A \in M_{n\times n}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ se e solo se $m_\lambda = d_\lambda$ per ogni autovalore λ.

18.5 Algoritmo per la diagonalizzazione

18.6 Corollario

(*vedi* [GS, Capitolo V])

§19. Prodotti interni e norme

19.1 Prodotto scalare canonico su $\mathbb{K}^n$

19.2 Esempi

19.3 Prodotto interno

19.4 Esempi

19.5 Spazio vettoriale metrico, norma associata a $< \cdot, \cdot >$

19.6 Teorema di Pitagora, Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

19.7 Definizione assiomatica di norma

§20. Basi ortonormali

20.1 ortogonale, ortonormale

20.2 Le coordinate di un vettore rispetto a una base ortonormale

20.3 Esempi

20.4 proiezione ortogonale, complemento ortogonale

20.5 Teorema: Per un sottospazio $U \subset V$ si ha $\mathbb{K}^n = U \oplus U^\perp$

20.6 Esempio: Per $A \in m_{m\times n}$ si ha $N(A) = C(A^H)^\perp$

20.7 Algoritmo di Gram-Schmidt

20.8 Corollario: Esistenza di basi ortonormali

(*vedi* [GS, Capitolo III], [A, Capitolo 10])

§21. Matrici ortogonali e unitarie

21.1 Osservazione sulle matrici unitarie

21.2 Matrici unitarie e matrici ortogonali

21.3 Determinante e autovalori di una matrice unitaria

21.4 Teorema di Schur

21.5 Corollario

21.6 Esempio

21.7 Matrici hermitiane e matrici normali

21.8 Esempi

21.9 Teorema Spettrale

21.10 Corollario sulle matrici simmetriche in $M_{n\times n}(\mathbb{R})$

(*vedi* [GS, Capitolo VI], [A, Capitolo 11])

Bibliografia:

[A] M. Abate, Algebra lineare, McGraw-Hill 2000.

[GS] E. Gregorio, L. Salce: Algebra lineare. Libreria Progetto, 2005.

Precorso on-line: sito web http://precorso.dicom.uninsubria.it/