ALGEBRA LINEARE CON ELEMENTI DI GEOMETRIA mod. avanzato

Prof. M. Spera a.a. 2008/09 | Prova Scritta del 14/7/2009 |

(1) Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano determinare la matrice della simmetria ortogonale rispetto alla retta $r: \ y = 2x$. Considerato poi il triangolo ABC, con $A:(0,0)$, $B:(2,0)$, $C:(1,1)$, si determini l'area (orientata) del cerchio circoscritto al triangolo $A'B'C'$, trasformato di ABC ... possibilmente senza fare calcoli.

(2) Nel piano euclideo reale, ampliato proiettivamente (e in cui sia fissato un riferimento cartesiano), si determini il fascio di coniche tangenti all'asse y in $O:(0,0)$ e passanti per $A:(1,0)$ e $B:(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Si trovi poi la conica $\mathcal{C}$ del suddetto fascio avente centro sull'asse x.

(3) Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, sia data la retta $r: \begin{cases} y-1=0 & \pi \\ \sqrt{3}x - y + 1 - \sqrt{3} = 0 & \pi' \end{cases} \equiv \pi \cap \pi'$

Si individui il piano π'' per $P:(1,1,0)$ $(\in r)$ perpendicolare a r. Determinare i centri delle sfere di raggio 1 tangenti ai tre piani π, π', π''. [Sugg.: leggendo le eq. nel piano xy, si determinino le bisettrici delle rette $y-1=0$ e $\sqrt{3}x - y + 1 - \sqrt{3} = 0$] — Tempo a disposizione 1h 45m

- - - - - - - - - - - -

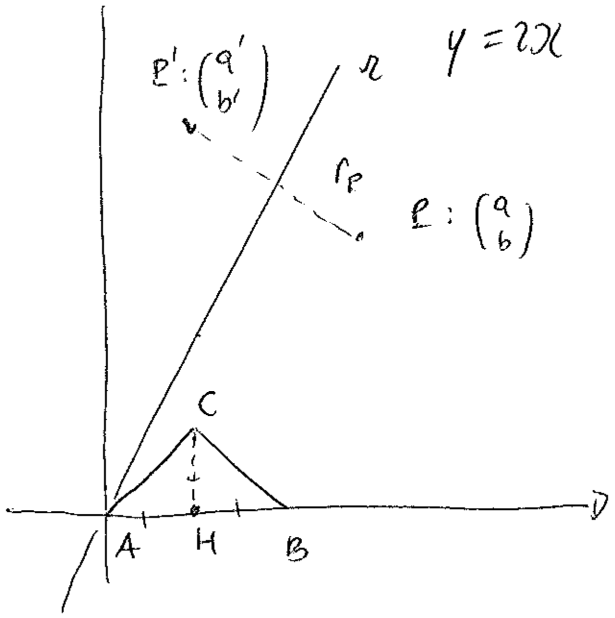
(1') Sia data la matrice $A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Per quali valori di a essa ammette un autovalore nullo? E quando un autovalore nullo di molteplicità (algebrica) 2. In quest'ultimo caso risulta diagonalizzabile? Determinare, sempre in quest'ultimo caso, gli autospazi della matrice e completare, eventualmente, ad una base di $\mathbb{R}^3$.

(2') Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il nucleo e l'immagine della matrice A_a dell'es. 1'. Nel caso $a=0$, si trovi la controimmagine (tramite A_0) di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ al variare di $b \in \mathbb{R}$ e la si interpreti geometricamente.

Tempo totale 2h 30m — Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

14/7/09

1



$$2x - y = 0$$

troviamo T : r_P

retta per $P : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp r$

$$r_P \begin{cases} x = a - 2t \\ y = b + t \end{cases}$$

$r_P \cap r$:

$$b + t - 2(a - 2t) = 0$$

$$b + t - 2a + 4t = 0$$

$$5t = 2a - b$$

$$t = \frac{2a - b}{5} \Rightarrow 2t = 2\,\frac{2a-b}{5}$$

$$P' : \begin{cases} x = a - 4\,\dfrac{2a-b}{5} = \dfrac{5a - 8a + 4b}{5} = \dfrac{-3a + 4b}{5} \\[2ex] y = b + 2\,\dfrac{2a-b}{5} = \dfrac{5b + 4a - 2b}{5} = \dfrac{4a + 3b}{5} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

(rot + ribaltamento 

$\det(\ ) = -1$ muta l'orientamento

Il cerchio circoscritto ad ABC, con

$A : (0,0)$, $B\ (2,0)$, $C : (1,1)$,

ha centro in $H : (1,0)$ e raggio 1

(l'eq. è $(x-1)^2 + y^2 = 1$) [chiaro...]

e ha area $A = \pi$.

Poiché T è un mov. rigido, è $A' = -\pi$

area orientata

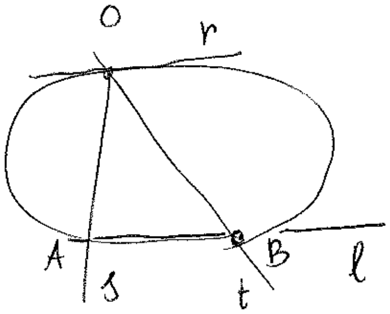
$\boxed{14/7/09}$

② Fascio di coniche per $A = (1,0)$, $B:\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

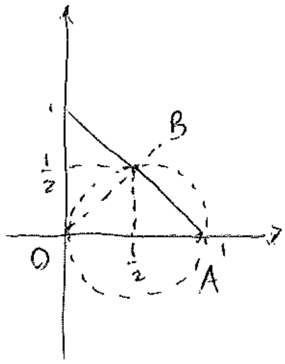
tangenti all'asse y in $O:(0,0)$

Coniche degeneri: $r \cdot \underset{\overset{\parallel}{AB}}{l} = 0$

$s \cdot t = 0$



$l = AB : \quad x + y - 1 = 0$



$\underset{s}{OA} : \quad y = 0 \qquad \underset{t}{OB} : \quad y - x = 0$

$r : \quad x = 0$

$\Rightarrow \mathcal{F} : \quad (x + y - 1)\, x + \lambda\, y\,(y - x) = 0$

Imponiamo che il centro C si trovi sull'asse x.

★ Osserviamo che ciò implica subito che $C : \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

e che $\mathcal{C} : \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ (circ. di centro C e raggio $\frac{1}{2}$. ($\mathcal{C} : x^2 + y^2 - x = 0$)

Procediamo però anche in modo standard

Scriviamo la matrice della conica generica del fascio:

$$x^2 + xy - x + \lambda y^2 - \lambda xy = 0$$

$$x^2 + (1-\lambda)\, xy + \lambda y^2 - x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1-\lambda}{2} \\ 0 & \frac{1-\lambda}{2} & \lambda \end{pmatrix}$$

(oppure ad es. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2\lambda \end{pmatrix}$)

Sia $C = [1, \xi, 0]$. La polare di $\mathcal{C}$ deve essere la retta impropria $x_0 = 0$

$$(x_0 \ x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1-\lambda}{2} \\ 0 & \frac{1-\lambda}{2} & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0 \ x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} -\frac{\xi}{2} \\ -\frac{1}{2} + \xi \\ \frac{1-\lambda}{2}\xi \end{pmatrix} = 0$$

$$-\frac{\xi}{2} x_0 + \left(\xi - \frac{1}{2}\right) x_1 + \frac{1-\lambda}{2} \cdot \xi \, x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \xi - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{1}{2}$$

Ma è pure $\frac{1-\lambda}{2}\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$

$$\Rightarrow \mathcal{C}: x^2 + y^2 - x = 0$$

altro modo: se il centro C è sull'asse x, i punti O e A devono essere necessariamente diametralmente opposti, e pertanto è $C = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Poiché $\overline{OC} = \overline{CB} = \overline{CA} = \frac{1}{2}$, C è il centro di una circonferenza.

③ $\boxed{14/7/09}$

$$r: \begin{cases} y-1=0 & \pi \\ \sqrt{3}x - y + 1 - \sqrt{3} = 0 & \pi' \end{cases}$$

$0x + y - 1 = 0$

$\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1-\sqrt{3}}{2} = 0$

(eq. param: $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$)

piano π'' per $P: (1,1,0)$ $\perp r$: $z=0$ (piano xy)

determinare i centri delle sfere tangenti a π, π', π'' di raggio 1. Sugg. leggendo tutto nel piano xy, determinare le bisettrici delle rette $y-1=0$

$\sqrt{3}x - y + 1 - \sqrt{3} = 0$

Sol. Le bisettrici si possono determinare in modo elementare (v. pag. successiva).
qui vediamo di farlo in modo standard

è: da $(a \pm a')x + (b \pm b')y + c \pm c' = 0$

(con $a^2+b^2 = a'^2 + b'^2 = 1$)

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \left(-\frac{1}{2} \pm 1\right)y + \frac{1-\sqrt{3}}{2} \pm (-1) = 0$$

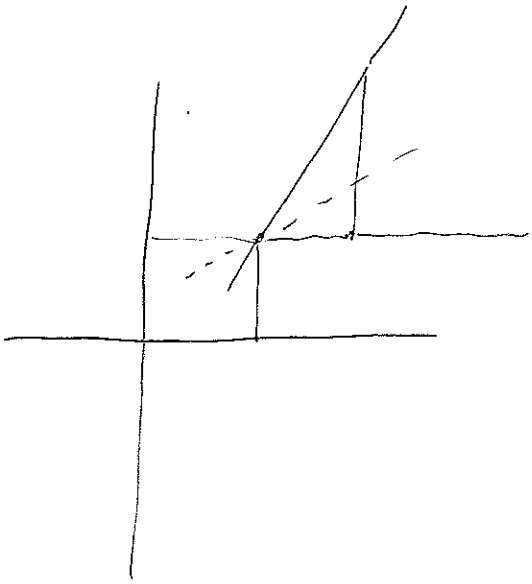
$-1-\sqrt{3}$

b': $\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2} + \frac{1-\sqrt{3}-2}{2}$ $\qquad \sqrt{3}x + y - 1 - \sqrt{3} = 0$

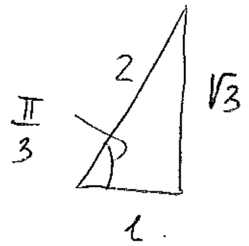
b'': $\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y + \frac{3-\sqrt{3}}{2} = 0$ $\qquad \sqrt{3}x - 3y + 3 - \sqrt{3} = 0$

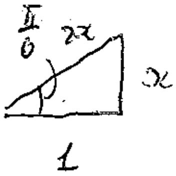
$x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} - 1 = 0$

Altro modo



$$y-1=\sqrt{3}(x-1)$$





$$4x^2-x^2=1$$
$$3x^2=1$$
$$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

bisettrice: $$y-1=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$$

altra bis. $$y-1=-\sqrt{3}(x-1)$$

$$\sqrt{3}y-\sqrt{3}=x-1$$

$$\boxed{x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}-1=0} \quad b'$$

$$\sqrt{3}(x-1)+y-1=0$$

$$\sqrt{3}x-\sqrt{3}+y-1=0$$

$$\boxed{\sqrt{3}x+y-1-\sqrt{3}=0} \quad b''$$

$$b': \begin{cases} x = \sqrt{3}\,t + 1 - \sqrt{3} \\ y = t \end{cases}$$

distanza da $y-1=0$ pari a 1:

$$|t-1| = 1 \qquad t-1 = \pm 1$$

$$t = 2$$

$$t = 0$$

$\Rightarrow$ ottengo $$P_1 = (\underbrace{2\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}, \; 2)$$

$$(1+\sqrt{3}, \; 2)$$

$$P_2 = (1-\sqrt{3}, \; 0)$$

$$b'': \begin{cases} x = t \\ y = -\sqrt{3}\,t + 1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

distanza da $y-1=0$ pari a 1:

$$|-\sqrt{3}t + \cancel{1} + \sqrt{3} - \cancel{1}| = 1$$

$$|-\sqrt{3}t + \sqrt{3}| = 1$$

$$\sqrt{3}\,|1-t| = 1 \qquad t-1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$t = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{3}} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

Otteniamo altri due pti

$$P_{\substack{3\\4}} : \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \ , \ -\sqrt{3}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1 + \sqrt{3}\right)$$

$$\cancel{-\sqrt{3}} \mp 1 + 1 + \cancel{\sqrt{3}}$$

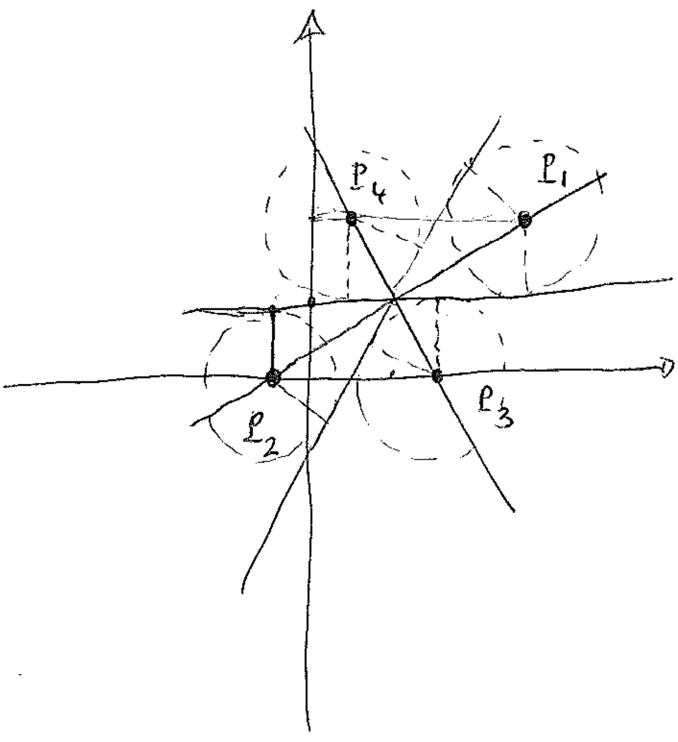
$$\wedge$$

$$0$$

$$2$$

$$P_3 : \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \ , \ 0\right)$$

$$P_4 : \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \ , \ 2\right)$$



Le 8 Sfere hanno allora come centri i punti

$$\left(\underline{P}_i , \pm 1 \right) \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

14/7/09

(1')

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ A_a ammette un autovalore nullo? E quando un autovalore nullo di molteplicità $= 2$? In quest'ultimo caso risulta diagonalizzabile? Determinare gli autospazi di A_a e completare, ev. ad una base di $\mathbb{R}^3$

Sol. $$P_c^{A_a}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ a & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \quad \leftarrow \text{(Laplace)}$$

$$(-\lambda)\left[-\lambda(1-\lambda) - a\right] = \lambda\left[\lambda(1-\lambda)+a\right]$$

$$= \lambda\left[-\lambda^2 + \lambda + a\right]$$

$\Rightarrow \forall a \ \exists$ autov $= 0$.

$\quad$ con molt 2 $\Leftrightarrow a = 0$

$$P_c^{A_0}(\lambda) = \lambda^2(1-\lambda)$$

La matrice

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango $r(A_0) = 2 \Rightarrow \nu(A_0) = 1$

$$\begin{gathered} \nu(A_0) = 1 \\ \parallel \\ m_g(A_0) \\ < m_a(A_0) = 2 \end{gathered}$$

Non è diag.

$$\overline{V}_0^{A_0}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ z = 0 \\ \cancel{0 = 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = -x \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\overline{V}_0^{A_0} = \left\langle \overset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

$$\overline{V}_1^{A_0} = \left\langle \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$ immediato, o anche in modo standard.

$\overset{\text{l.i.}}{(v_1, v_2)}$ può essere completato ad una base di $\mathbb{R}^3$ tramite $v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. □

14/7/09

2'

Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, nucleo e immagine di

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol. $r(A_a) = 2 \quad \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow \nu(A_a) = 1$

base di $\operatorname{Im} A_a$: es: $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

base di $\ker A_a$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + y + 2z = 0$$
$$ax + z = 0$$
$$\cancel{0 = 0}$$

$$z = -ax$$

$$\Rightarrow \quad x + y - 2ax = 0 \Rightarrow y = (2a-1)x$$

$$\ker A_a = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2a-1 \\ -a \end{pmatrix} \right\rangle \Leftarrow \begin{cases} x = x \\ y = (2a-1)x \\ z = -ax \end{cases}$$

Controimmagine di $\begin{pmatrix}1\\0\\b\end{pmatrix}$ tramite A_0

$b \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}}^{r(A)=2}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\b\end{pmatrix}$$

da R.C nessuna sol per $b \neq 0$

se $b = 0$ è

$$x + y + 2z = 1$$
$$z = 0$$
$$0 \cancel{=} 0$$

$$x + y = 1 \qquad y = 1 - x$$

$$\begin{cases} x = x \\ y = 1 - x \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underset{\text{sol. particolare}}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}} + x\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}_{\text{base di } \ker A_0}$$

geometricamente è una retta.