

TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE

a.a. 2009/10

Prof. M. Spina

Lezione **A3**

FUNZIONI OLOMORFE

Sia $U \subset \mathbb{C}$ una regione (aperto connesso)

$$(\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2) \quad z = x + iy$$

★ Sia $f: U \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(z) := u(z) + i v(z) \equiv u(x, y) + i v(x, y)$$

u parte reale di f ($=: \operatorname{Re} f$)

v = immaginaria di f ($=: \operatorname{Im} f$)

una tale funzione riduce in modo naturale

una trasformazione piana

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in U$$

★ Sia $f \in \mathcal{C}^1(U)$ (ovvero: $u, v \in \mathcal{C}^1(U)$)
(cio semplifica moltissimo la trattazione...)

Sia $z_0 \in \mathcal{U}$

★ Def. $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ si dice olomorfa in $z_0 \in \mathbb{C}$

se è derivabile nel senso complesso, ovvero

$$\text{se } \exists \quad f'(z_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

$$(h \in \mathbb{C}) \quad (f'(z_0) \in \mathbb{C})$$

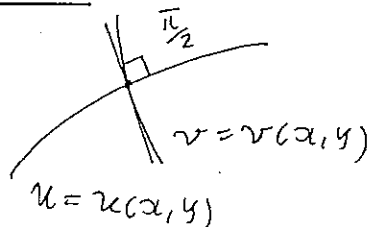
★ f si dice olomorfa in $\mathcal{U}$ se f' esiste in ogni punto di $\mathcal{U}$. $\mathcal{H}(\mathcal{U}) := \{ f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}, (f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})) \mid f \text{ olomorfa in } \mathcal{U} \}$

★ Teorema $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}) \iff$

valgono le condizioni di Cauchy-Riemann

$$\text{CR: } \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

★ Osserviamo che le condizioni di CR ci dicono che la trasformazione piana indotta da f è ortogonale



Dim. ($\Rightarrow$) Se $f \in \mathcal{H}(U)$ si ha in

un dato punto $z_0 \equiv z_0 \equiv (x_0, y_0)$

$$f'(z_0) = u_x^0 + i v_x^0 = \dots = v_y^0 - i u_y^0$$

(ponendo nella def. prima $h = \Delta x$ e poi
 $h = i \Delta y$) $\Rightarrow$ seguono le CR

Osserviamo poi che

$$\star f'(z_0) = f_x^0 = -i f_y^0$$

$\Leftarrow$ Si scrive il rapporto incrementale complesso
e si usano le CR ...

□

$$\star \text{ Definiamo } \begin{aligned} dz &= dx + i dy \\ d\bar{z} &= dx - i dy \end{aligned} \quad (\text{diff. compless})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right. \right.$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \right)$$

Si constata facilmente che

$$df := dx + i dy = \dots = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

★ Le condizioni di Cauchy-Riemann
divengono equivalenti a $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ (calcolo
diretto)

★ combinazioni lineari, prodotti,
composte di f olomorfe sono olomorfe

★ Se $f(z) \in \mathcal{H}(U)$, $f(\bar{z})$ non è olomorfa
infatti $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = 1 \neq 0$ (+ f è anzi olomorfa
in que: $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$)

Altro esempio: $f = |z|^2 = \bar{z}z$ non è olomorfo

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z \neq 0$$

Teorema

★ Sia $f: U \rightarrow \mathbb{C}$

$$(z = x + iy \quad w = u + iv = f(z))$$

Sia $f' \neq 0$ su U

★ Allora f induce una trasformazione conforma

$$\begin{aligned} \text{Dica} \quad dx^2 + dy^2 &= (dx + i dy)(dx - i dy) \\ &= dz d\bar{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} du^2 + dv^2 &= dw d\bar{w} = df d\bar{f} = (f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z})(\overline{f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}}) \\ &= (df = \overline{d\bar{f}}) = f_z dz \cdot \overline{f_{\bar{z}} d\bar{z}} = \end{aligned}$$

$$= |f_z|^2 dz d\bar{z} = |f'|^2 dz d\bar{z} > 0$$

Viceversa, si può mostrare che una
 trasformazione conforme $(x, y) \rightarrow (u, v)$
 è indotta da una $f (= u + iv)$
 olomorfa o antiolomorfa (se la trasformazione
 conserva o inverte l'orientamento, rispettivamente).

** Teorema (Riemann) . . Date due regioni
 semplicemente connesse, esiste sempre
 una funzione biolomorfa (*) che mappa
 l'una sull'altra (*): olomorfa, biunivoca,
 con inversa olomorfa.

** Teorema Sia U una regione semplicemente
 connessa e $f \in C^1(U)$.

$$\text{Allora } f \in H(U) \Leftrightarrow \oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

$\forall \Gamma$ chiusa, generalmente regolare

($\Rightarrow$ Teorema di Cauchy
 $\Leftarrow$ Teorema di Morera)

Dove $\oint_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{\Gamma} (u + iv)(dx + i dy)$

$$:= \int_{\Gamma} u dx - v dy + i \int_{\Gamma} v dx + u dy$$

(definizione)

($\Rightarrow$) Γ è frontiera di un dominio

è contenuto in U . In virtù del
teorema di Green si ha:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \dots = \iint_{\Omega} (-v_x - u_y) dx dy +$$

$$+ i \iint_{\Omega} (u_x - v_y) dx dy = 0$$

(per CR)

($\Leftarrow$) viceversa, se $\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$

$\forall \Gamma$, sfruttando la semplice connessione
di U si ha di nuovo

$$0 = \oint_{\Gamma} f(z) dz \Rightarrow \dots \iint_{\Omega} (-v_x - u_y) dx dy$$

$$= \iint_{\Omega} (u_x - v_y) dx dy \quad \forall \Omega \subset U$$

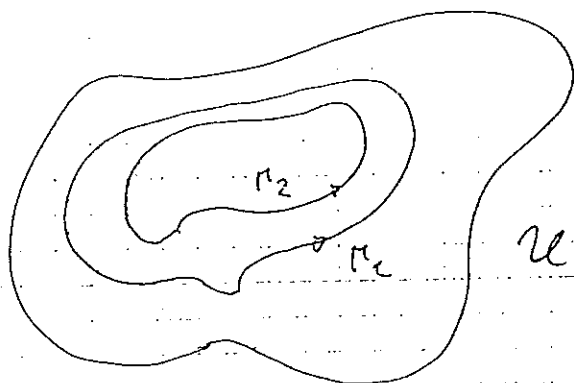
$\Rightarrow$ valgono le CR.

□

★ Sia U una regione non vuota,
semplicemente connessa.

Un ragionamento simile al precedente
mostra che, se $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ (omologhe..)

$$\text{si ha } \oint_{\Gamma_1} f(z) dz = \oint_{\Gamma_2} f(z) dz$$



★ Osservazione : Se U non è semplicemente connesso, non necessariamente si ha

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0!$$

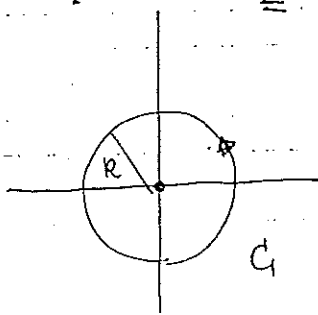
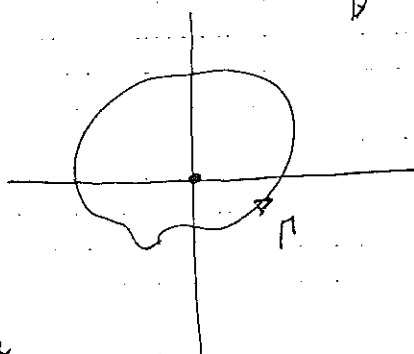
Sia, infatti, $U = \mathbb{C} - \{(0,0)\}$

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

Si ha:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{i\varphi}} d(Re^{i\varphi}) =$$

$$= \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} e^{-i\varphi} \cdot Re^{i\varphi} \cdot i d\varphi$$



$$= 2\pi i \neq 0$$

γ continuo e a valori in $\mathbb{Z} \Rightarrow$ costante

winding number

★ $\text{ind}_{\gamma}(z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{s-z_0} ds = \dots m \in \mathbb{Z}$

indice di avvolgimento di γ rispetto a z_0

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \omega$$

★ dipende solo dalla classe di omotopia di γ



A3-6

$$F: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{C} \text{ cont.}$$

$$(t, s) \mapsto F(t, s)$$

$$F(0, s) = \gamma_0(s) \quad \equiv \gamma(s)$$

$$F(1, s) = \gamma_1(s)$$

* Olomorfia e armofia

Sia $f \in \mathcal{H}(U)$ oloomorfa (sia $f \in \mathcal{C}^2$..
In realtà f è comunque $\mathcal{C}^0$)
 $f = u + iv$. Allora u e v sono
armofiche $\Delta u = \Delta v = 0$

Dim. Immediata da CR

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad \begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yy} = -v_{xy} \end{cases}$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0 \quad (\text{Schwarz.})$$

analogamente $\Delta v = 0$.

* Viceversa, data u armonica, esiste (unica a meno di una costante) v armofica (semplicemente connesso)
tale che $f = u + iv$ sia oloomorfa
(v : armonica coniugata di u).

Dim: Sia u t.c. $\Delta u = 0$. Pongo

$$w = \underbrace{-u_y}_{\in \mathbb{R}} dx + \underbrace{u_x}_{\in \mathbb{R}} dy \quad w \text{ è chiusa}$$

$$dw = (u_{xx} + u_{yy}) dx \wedge dy = 0 \Rightarrow (\text{Poincaré})$$

$$\exists \text{ } w \text{ esatta (almeno loc.)} \quad w = dv = v_x dx + v_y dy$$

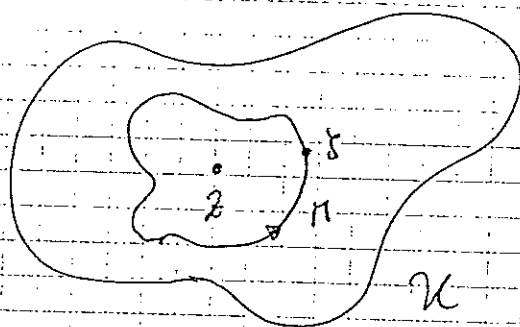
$\Rightarrow$ valgono le CR sicché f è oloomorfa.

$$dv = dv' \Leftrightarrow d(v - v') = 0 \Rightarrow v - v' \text{ costante..}$$

Tale ragionamento può essere generalizzato in modo da dare
l'influenza di coordinate isoterme su una superficie

☆☆ Formula di Cauchy

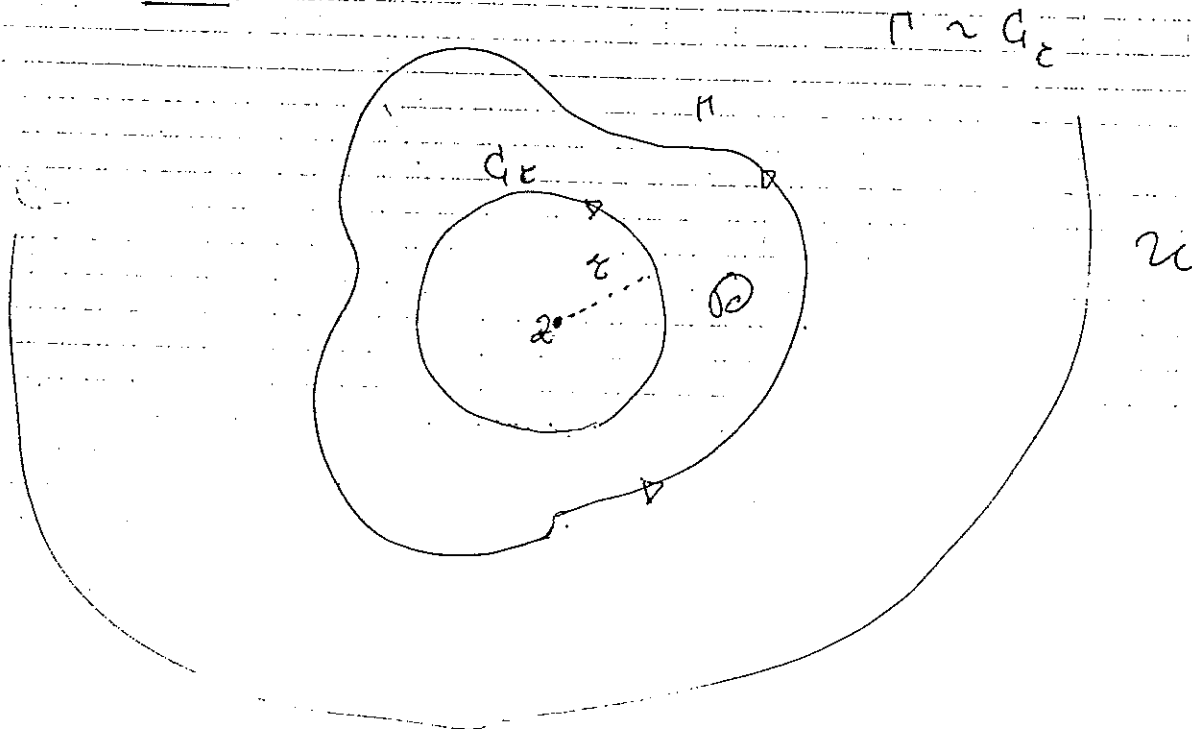
$f: \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa
 regione
 ($\mathcal{U}$ connessa)



Γ chiusa, per regione.
 ($z \notin \Gamma$)

$$\text{Si ha: } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Dim.



Si ha:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(z)}{z-z} dz$$

($\frac{f(z)}{z-z}$ (z fissato) è olomorfa (per $z \neq z$))

posto: $z = z + re^{i\varphi} \in C_r$ e

$$dz = re^{i\varphi} \cdot i d\varphi$$

e l'ultima integrale diventa

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{i\varphi})}{re^{i\varphi}} \cdot re^{i\varphi} \cdot i d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi}) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\varphi}) d\varphi + \frac{1}{2\pi} i \int_0^{2\pi} v(z + re^{i\varphi}) d\varphi$$

= (cor. della media integrale)

$$u(z') + i v(z'') \quad (*)$$

con $z', z'' \in C_r$

✧ Tale risultato vale per C_r . Se ora $r \rightarrow 0$ si ha

$$(*) \rightarrow u(z) + i v(z) = f(z) \quad \square$$

Osserviamo che, fissato z ,
la funzione $\frac{1}{z-\zeta}$, per $z \neq \zeta$, è

uniformemente derivabile e

$$\frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{1}{z-\zeta} \right) = \frac{n!}{(z-\zeta)^{n+1}} \quad n=0,1,2,\dots$$

Osservato che Γ è un compatto in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

si ha, come conseguenza della formula
di Cauchy; che $f^{(n)}$ è olomorfa e

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^{n+1}} d\zeta$$

(derivazione sotto il segno di integrale...)

★ Osserviamo, che, per la stessa ragione, si ha
che se $f \in C^{\infty}(\mathbb{C})$ soddisfa la formula di
Cauchy, allora è olomorfa.

★★ Teorema (Liouville)

Sia $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa

(una f olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ si dice intera)

e limitata : $\exists M > 0$ tale che $|f(z)| < M$
 $\forall z \in \mathbb{C}$.

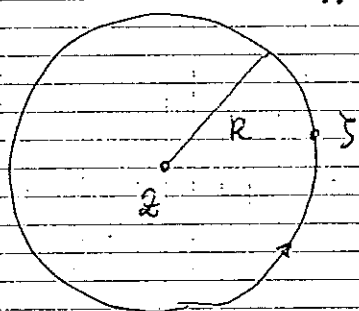
Allora f è costante

Dim. Dato che $\mathbb{C}$ è connesso, basta far vedere

che $f'(z) \equiv 0$ in $\mathbb{C}$. Si ha, in un generico $z \in \mathbb{C}$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \dots$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + Re^{i\varphi}) e^{-i\varphi}}{R} d\varphi$$



$= 0$

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot M \cdot \frac{1}{R} = \frac{M}{R}$$

$\forall R > 0$, da cui $f'(z) = 0$

□

Dal teorema di Liouville si ottiene immediatamente il

✚✚ Teorema fondamentale dell'algebra (Gauss)

Ogni polinomio $P = P(z)$ ammette almeno una radice (e, per Ruffini, ne ammette n , contate con la loro molteplicità)

Dim. p.a. Si applichi il teor. di Liouville

$$\text{a } f(z) = \frac{1}{P(z)} \dots$$

★ Serie di potenze (a $\mathbb{C}$)

poniamo la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad a_n \in \mathbb{C} \\ z, z_0 \in \mathbb{C}$$

Ricordiamo che

★ una successione (numerica) a valori complessi

$\{f_n\}$, $f_n \in \mathbb{C}$ dà luogo a due successioni reali $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, dove $f_n := u_n + i v_n$

★ una serie numerica a valori complessi è la successione delle sue ridotte

★ una successione a valori complessi (e in particolare una serie) converge se e convergono le successioni (reali) sopra considerate.
(parte reale e parte immaginaria)

★ una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge assolutamente

e, per definizione, $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ converge.

★ una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge (o converge semplice)

se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ($f_n = u_n + i v_n$)

convergono.

★ Se $\sum f_n$ converge assolutamente

allora converge semplicemente: infatti

$$\left| \sum_{n=M+1}^N f_n \right| \leq \sum_{n=M+1}^N |f_n| \quad N > M$$

★ Consideriamo ora una serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

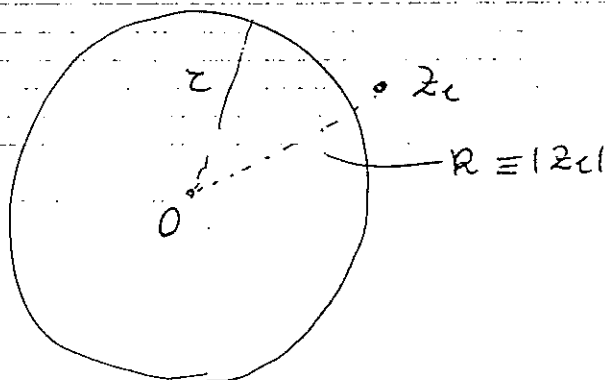
(per semplicità poniamo $z_0 = 0$... non si può in generalità ...)

★ Teorema (Abel)

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge in $z_c \in \mathbb{C}$, $z_c \neq 0$

allora converge totalmente (e dunque assolutamente e uniformemente)

in qualsiasi cerchio chiuso di centro l'origine
e di raggio $R < |z_c| \equiv R$



Dire. Si fissi $\varepsilon < R$ e sia $z \in \mathbb{C}$

tale che $|z| \leq \varepsilon$

Poi che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_c^n$ converge, $\exists N \geq 0$

tale che se $n \geq N$, si ha

$$|a_n| |z_c|^n = |a_n z_c^n| < 1$$

(il termine generico di una serie convergente è trascurabile per $n \rightarrow \infty$). Da ciò segue

$$\sum_{n=N+1}^M |a_n z^n| = \sum_{n=N+1}^M |a_n| |z_c|^n \cdot \left| \frac{z}{z_c} \right|^n$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^M \left| \frac{z}{z_c} \right|^n \leq \sum_{n=N+1}^M \left(\frac{\varepsilon}{R} \right)^n$$

ora $\frac{\varepsilon}{R} < 1$, e si conclude

tramite il M-test...

□

4 Corollario : Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ diverge (ovvero:

non converge) in z_c , allora diverge in ogni z tale che $|z| > |z_c|$

□

★ Definizione: sia

$$R := \sup \left\{ r \geq 0 / \exists z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } |z| = r \text{ e } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge} \right\}$$

R è detto raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

★ Se l'insieme definito da $\{ \quad \}$ non è limitato superiormente si pone $R = +\infty$

★ Si assume che tale insieme non è vuoto: infatti contiene almeno $z=0$.

★ Il teorema di Abel ci consente di determinare R .

$$\text{Sia } R' := \sup \left\{ r \geq 0 / \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \text{ converge} \right\}$$

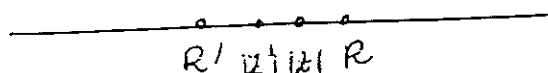
$$= \sup \left\{ r \geq 0 / \exists z \in \mathbb{C} / \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge assolutamente} \right\}$$

Si ha

★★ Teorema: $R' = R$

Dim. Ovviamente $R' \leq R$.

La possibilità $R' < R$ è esclusa dal teorema di Abel



Inoltre, se così fosse $\exists z \in \mathbb{C}$,

con $R' < |z| < R$ tale che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

converge. In base al teorema di Abel, $\exists z' \in \mathbb{C}$

con $R' < |z'| < |z|$ tale che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z')^n$

converge assolutamente, in contrasto con la
definizione di R' .

Diunque $R' = R$ $\square$

★ Si può parlare di raggio di convergenza R usando
i criteri di convergenza assoluta per le serie.

★ Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri re

Sia S l'insieme costituito dai suoi valori
di aderenza, ovvero dai ^{tutti i} possibili limiti
delle sottosuccessioni estratte da $\{a_n\}$.

Allora, il massimo limite di $\{a_n\}$,

denotato con $\overline{\lim} a_n$, è per definizione

$\sup S$. Analoga definizione per il minimo
limite di $\{a_n\}$, $\underline{\lim} a_n$.

(Se $\{a_n\}$ non è limitata superiormente,

si pone $\overline{\lim} a_n = +\infty$; e non è

limitata inferiormente si pone $\underline{\lim} a_n = -\infty$

★ $\{a_n\}$ ammette limite $\Leftrightarrow \overline{\lim} = \underline{\lim}$

★ Teorema (Cauchy - Hadamard)

$$R = (\overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1}$$

(se $\overline{\lim} = 0$, si ha $R = +\infty$,

se $\overline{\lim} = +\infty$, si ha $R = 0$) $\square$

★ Se $L = \overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ esiste (finito o no)

si ha $R = (\overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1}$

Infatti, si consideri

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{|a_n| |z|^n}_{b_n}$$

posto z , è una serie a termini non negativi.

ora si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^{\frac{1}{n}} = |z| \cdot \overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} = L \cdot |z| < 1$

la serie data converge assolutamente per $|z| < \frac{1}{L}$.
 Se $|z| > \frac{1}{L}$, la serie non converge (neanche semplicemente).
 Se $|z| = \frac{1}{L}$ non si può dire nulla.

★ Analogamente, si esiste $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

si ha $R = \frac{1}{L}$

Con virtù del criterio del rapporto). Si considera infatti $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| |z|^{n+1}}{|a_n| |z|^n} = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

4. In sede di esame, conviene sempre svolgere volta per volta i calcoli precedenti un uso amico delle formule più condotte a errori grossolani.

5. Sia data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

e sia R il suo raggio di convergenza.

4. Derivando termine a termine, si è condotti alla serie $(*)$ in senso complesso]

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \left(\text{ponendo } n-1 = N, a_{n=N+1} \right)$$

$$= \sum_{N=-1}^{\infty} (N+1) a_{N+1} z^N = \sum_{N=0}^{\infty} (N+1) a_{N+1} z^N$$

$$= \left(\text{ponendo } N=n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$$

4. Integrando termine a termine si è condotti a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} z^n$$

★ Teorema. Le due serie così costruite hanno raggio di convergenza R .
(= a quello della serie originaria)

Questa può essere verificata con un calcolo simile a quello usato nella dimostrazione del teorema di Abel, oppure in questo modo, facendo uso della formula di Cauchy-Hadamard e sotto condizione la serie derivata

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \cdot (n+1) 2^n ;$$

poniamo $b_n = (n+1) a_{n+1}$

calcoliamo

l'lim $|b_n|^{\frac{1}{n}}$. Si ha

$$|b_n|^{\frac{1}{n}} = (n+1)^{\frac{1}{n}} |a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} =$$

$$= (n+1)^{\frac{1}{n}} \left[|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}} \right]^{\frac{n+1}{n}}$$

★ Ora, una qualsiasi sottosuccessione estratta dalla successione $\{b_n\}$ converge ad un limite e se e soltanto se la corrispondente successione estratta da $\{a_n\}$ converge ad un limite, e si vede subito che tale limite deve uguagliare il

$$(n+1)^{\frac{1}{n}} \rightarrow e, \quad \frac{n+1}{n} \rightarrow 1 \quad \text{se } n \rightarrow \infty$$

...
da ciò si conclude. $\square$

$\star$ Quest'ultimo è subito, combinato con il
 teorema di Abel, a dice che, all'interno
 del cerchio di convergenza, la

funzione

$$(*) \quad f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

è continua, derivabile (in senso complesso)

$$\text{e } f'(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$$

ovvero: è lecita la derivazione termine a termine

(Analogamente è lecita l'integrazione
 termine a termine) (in senso complesso...)

$\star$ f è dunque una funzione olomorfa
 (all'interno del cerchio di convergenza)

Una funzione del tipo $(*)$ è detta funzione analitica $(+)$

$\star$ Dunque ogni funzione analitica è olomorfa

$(+)$ Più in dettaglio: $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ è

oltra analitica in U (regione) se $\forall z_0 \in U$

esiste un cerchio di raggio $\epsilon > 0$ e di centro z_0 tale che, ^{all'interno} di tale cerchio, si abbia

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \left(\text{da ciò segue poi } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right)$$

★ Sia $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa
(regione)

Sia $y \subset U$ un insieme contenuto in
un accumulazione.

Se $f|_y = 0$, allora $f \equiv 0$ in U .

Di conseguenza, se $f_i: U \rightarrow \mathbb{C}$ $i=1,2$

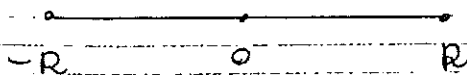
è olomorfa, e $f_1|_y = f_2|_y$

si ha $f_1 = f_2$

★ Consideriamo una serie di potenze a termini
reali $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

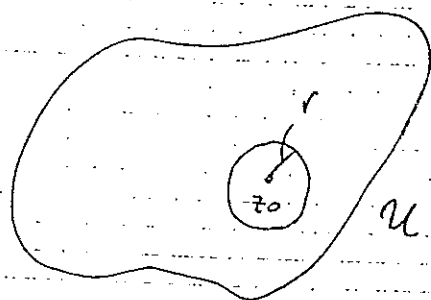
Anche in questo caso si ha la nozione di

"cerchio di convergenza" o, più propriamente
di intervallo di convergenza.



↑
raggio di convergenza

★ All'interno dell'intervallo di convergenza
si può derivare e integrare termine a
termine.

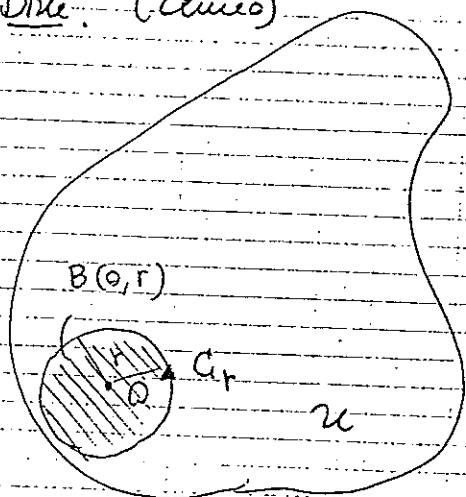


(f analitica in $U \Leftrightarrow f$ olomorfa in U)

⚡ Dalla formula di Cauchy si deduce
che è vero anche il viceversa

f olomorfa in $U \Leftrightarrow f$ analitica in U

Dim. (ciclo)



[per semplicità supponi
che $0 \in U \dots$]

Sia $\varepsilon \leq \text{dist}(0, \partial U)$
 $z \in B(0, r)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

$$\partial U = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(\xi)}{\xi} \left(\frac{1}{1 - \frac{z}{\xi}} \right) d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(\xi)}{\xi} \left(1 + \frac{z}{\xi} + \left(\frac{z}{\xi}\right)^2 + \dots \right) d\xi$$

$$= \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi \right] z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

proponiamo il seguente teorema, dovuto ad Abel

Teorema . Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge per $x = R$

($R =$ raggio di convergenza), allora

converge uniformemente in $[0, R]$ (e dunque

definisce una funzione continua in tale intervallo.

(Analogo enunciato se la convergenza è in $x = -R$)

★ Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{R}$

definita in $(-R, R)$ (R raggio di conv.)

Sia $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

(Serie di Mac-Laurin)

in generale si parla di serie di Taylor

★★ Ora, $\exists!$ $f = F(z)$, definita in $\{|z| < R\}$

analitica, tale che $f(x) = F(x)$ per $|x| < R$

(prolungamento analitico di una serie di potenze reali), f è data da

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$\text{e } a_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

questo perché $(-R, R)$ contiene più di
accumulazione (ogni suo pto è tale!).

★ quest'ultimo risultato ci permette di
estendere le funzioni elementari nel
campo complesso.

Sia, per esempio

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (R = +\infty)$$

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (\text{prod. analitico di}$$

★ e^z è una funzione intera.

$$\text{Da } e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \quad \forall z_1, z_2$$

Si trova facilmente (sempre per l'unicità
del prod. analitico)

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \quad \forall z_1, z_2$$

★ In particolare e^{ix} è definito e, si ha
in serie di Taylor:

$$\underline{e^{ix} = \cos x + i \sin x} \quad \text{formula}$$

Euler

(4) per qui tale formula era una definizione:
ora è un teorema)

★ Poniamo poi

$$\sin z := z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$\cos z := 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

★ esse sono funzioni interi, e non
possono essere limitate! (Liouville)

Vale l'identità

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

(perché vale in $\mathbb{R}$...)

Analogamente definisco

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

$$\text{Si ha } \operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z = e^z$$

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$$

$$\text{e anche } \sin iz = i \operatorname{sh} z \quad \text{etc...}$$

★ Vogliamo ora definire $\log z$

la definizione "naturale" è (quando in
modo formale
(per $z \neq 0$)

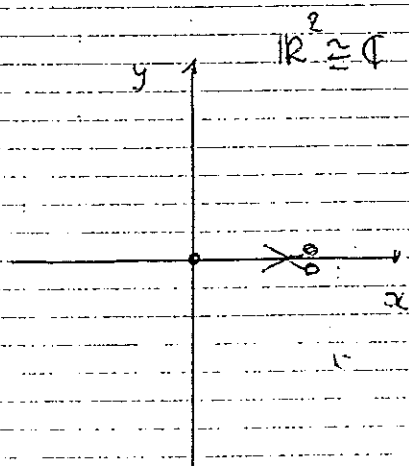
$$\log z = \log |z| e^{i\varphi} = \log |z| + \log e^{i\varphi}$$

$$= \log |z| + i\varphi$$

che è determinata a meno di
multiplici interi di 2π

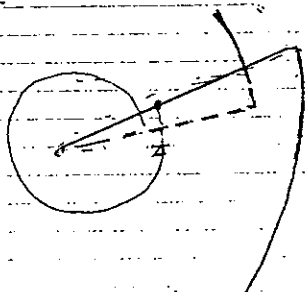
★ $\log z$ appare come una "funzione a
più valori"

Teoria di Riemann (★★★)



si tagli il piano complesso
lungo $\{x \geq 0\}$

e si consideri una superficie
di tipo "elicoidale"



a molti "fogli"
indici da $k \in \mathbb{Z}$

★★ $\log z$ è definita su una superficie Σ

(superficie di Riemann) descritta da

coordinate

(φ, ρ)
 $\rho > 0$

$$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$$

indici

$$\rho \in [0, 2\pi)$$

su quale "foglio" ci troviamo
(in tal caso il R -esimo)

$$\log : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(\varphi, \rho) \quad \log \rho + i\varphi$$

$$(z = |z|e^{i\varphi}) \quad = \log |z| + i\varphi$$

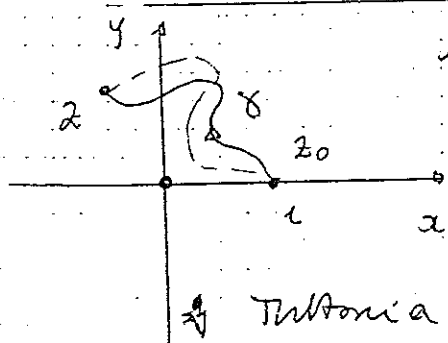
★ Tale procedimento è generale: ad ogni funzione olomorfa si associa la sua superficie di Riemann

Per esempio la sup di Riemann
associata a $z^{\frac{1}{2}}$ ha due fogli

(quella per $z^{\frac{1}{n}}$ ha n -fogli...)

★ $\log z$ può essere visto come definito così ($z \neq 0$)

$$\log z = \int_{z_0}^z \frac{ds}{s} \quad \text{con } z_0 = (1, 0)$$



l'integrale è preso su un qualsiasi
cammino γ congiungente z_0 a z
e che non racchiuda l'origine

★ Tuttavia l'architettura precedentemente
descritta si chiama ...

Si osserva che $s = x + iy$

$$\frac{ds}{s} = \frac{\overline{s} ds}{|s|^2} = \frac{(x - iy)(dx + i dy)}{x^2 + y^2} =$$

$$z = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + i \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = w_i$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} + i dp$$

$$= \frac{1}{2} \frac{dp^2}{p^2} + i dp = \frac{1}{2} \frac{2p dp}{p} + i dp =$$

$$= d \log p + i dp$$

Tutto è conseguenza del fatto che w_i è
chiusa ma non esatta!