I numeri complessi

Non dovrebbe essere considerata un'idea insolita quella di ampliare un insieme numerico per consentire di eseguire operazioni altrimenti impossibili: i numeri interi negativi vengono introdotti esattamente per rendere possibili tutte le sottrazioni e le frazioni per rendere possibili le divisioni (con divisore diverso da zero). I numeri reali rispondono all'esigenza di misurare segmenti incommensurabili rispetto all'unità di misura.

Rimane almeno un'operazione che non ha sempre senso nei numeri reali: non esistono numeri reali r tali che $r^2 = s$, se $s < 0$.

Ci accorgiamo che basterebbe trovare un "numero" che elevato al quadrato dia -1 per "risolvere" questo problema. Come abbiamo già fatto allora in situazioni simili, introduciamo un nuovo "numero" con questa proprietà. Seguendo l'esempio dei matematici del '500 (Cardano e Bombelli fra gli altri), chiameremo questo numero *unità immaginaria* e lo denoteremo con il simbolo i, secondo la notazione di Euler.

Ovviamente questo numero deve essere "come tutti gli altri" e quindi avrà senso moltiplicarlo e sommarlo con un altro numero reale. Dunque abbiamo un'intera famiglia di nuovi numeri: quelli della forma

$$a + bi$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Non abbiamo bisogno di altri, perché vogliamo che continuino a valere le usuali proprietà delle operazioni; quindi

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

per l'addizione (abbiamo usato le proprietà associativa e commutativa dell'addizione e quella distributiva della moltiplicazione). Per la moltiplicazione:

$$(a + bi)(c + di) = ac + bic + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

(notiamo che si è usato il fatto che $i^2 = -1$). Dunque questi nuovi numeri si comportano esattamente come gli altri, basta usare le solite regole di calcolo e che $i^2 = -1$.

Abbiamo però alcuni problemi. Il primo è: può capitare che $a + bi = c + di$? Lo esaminiamo con calma. Intanto, se eseguiamo la somma

$$(a + bi) + (-a + (-b)i),$$

troviamo zero; scriveremo $-a - bi$, per brevità. Questo numero è l'*opposto* di $a + bi$. Domandarsi quando $a + bi = c + di$ equivale allora a chiedersi quando $x + yi = 0$ (basta scrivere $x = a - c$ e $y = b - d$).

Se $x + yi = 0$ e $x = 0$, abbiamo dunque $yi = 0$, da cui $(yi)^2 = 0$ e quindi $-y^2 = 0$: ciò implica $y = 0$, perché $y \in \mathbb{R}$. Può essere $x \neq 0$? No. Infatti

$$(x + yi)(x - yi) = x^2 + yix - xyi + y(-y)i^2 = x^2 + xyi - xyi + (-y^2)(-1) = x^2 + y^2.$$

Se $x + yi = 0$, anche $(x + yi)(x - yi) = 0$ e quindi $x^2 + y^2 = 0$. Ciò accade solo se $x = y = 0$.

Definizione. Un *numero complesso* è un'espressione del tipo $a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

I numeri a e b sono univocamente determinati e si chiamano rispettivamente *parte reale* e *parte immaginaria* del numero complesso. Quando scriveremo espressioni del tipo $z = a + bi$, intenderemo che a e b siano reali.

Rimane un altro problema importante: siamo sicuri che per questi numeri le regole di calcolo usuali siano veramente applicabili? Non potrà succedere che si incontri una contraddizione nell'uso di questi nuovi "numeri"? Risolveremo il problema più avanti. Per ora continueremo a operare con questi numeri applicando le regole usuali.

Esempio. Ogni numero complesso diverso da zero ha esattamente due radici quadrate. Sia infatti $a + bi \neq 0$. Cerchiamo allora i numeri complessi $x + yi$ (con $x, y \in \mathbb{R}$) tali che

$$(x + yi)^2 = a + bi.$$

Svolgendo i calcoli, dobbiamo avere $(x^2-y^2)+2xyi = a+bi$ e quindi

$$\begin{cases} x^2-y^2=a, \\ 2xy=b. \end{cases}$$

Se $b=0$ il numero complesso è di fatto reale e sappiamo già risolvere il problema: se $a>0$ prendiamo $x=\sqrt{a}$ oppure $x=-\sqrt{a}$ e $y=0$; se $a<0$ prendiamo $x=0$ e $y=i\sqrt{-a}$ oppure $y=-i\sqrt{-a}$.

Se $b\neq 0$, possiamo ricavare $y=b/2x$ e sostituire, ottenendo l'equazione biquadratica

$$4x^4-4ax^2-b^2$$

che porge

$$x^2=\frac{4a+\sqrt{16a^2+16b^2}}{8}=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

L'altra radice è negativa, quindi inaccettabile come valore di x^2. Otteniamo due valori opposti per x e, in corrispondenza, due valori opposti per y. Con calcoli analoghi ai precedenti avremo $x=b/2y$, da cui $4y^4+4ay^2-b^2=0$ e

$$y^2=\frac{-4a+\sqrt{16a^2+16b^2}}{8}=\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

I segni delle soluzioni in x e y vanno scelti in modo che $2xy=b$.

Un prodotto di numeri complessi può essere reale (cioè avere parte immaginaria nulla): abbiamo già visto un caso calcolando $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$.

Definizione. Se $z=a+bi$ è un numero complesso, il numero complesso $\bar{z}=a-bi$ si dice il *coniugato* di z.

Questa operazione di passaggio al coniugato ha proprietà interessanti:

(C_1) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$;
(C_2) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$;
(C_3) $\bar{\bar{z}}=z$;
(C_4) z è reale se e solo se $z=\bar{z}$.

Le dimostrazioni sono semplici applicazioni delle regole di calcolo. Con il coniugato si possono anche calcolare la parte reale e la parte immaginaria di un numero complesso:

$$z=\frac{z+\bar{z}}{2}+\frac{z-\bar{z}}{2i}i.$$

Si noti l'analogia di questa scrittura con quella di una matrice come somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica.

Avendo osservato che, per $z=a+bi$, $z\bar{z}=a^2+b^2$ è un numero reale non negativo, possiamo dare questa definizione.

Definizione. Se $z=a+bi$ è un numero complesso, il *modulo* di z è

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

La seconda proprietà del coniugio dice allora che

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|.$$

Infatti

$$|z_1z_2|^2=(z_1z_2)\overline{(z_1z_2)}=(z_1z_2)(\bar{z}_1\bar{z}_2)=(z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2)=|z_1|^2|z_2|^2,$$

da cui la tesi.

In particolare, se $|z|=1$, abbiamo che $z\bar{z}=1$, cioè $\bar{z}$ è l'inverso di z rispetto alla moltiplicazione. Possiamo generalizzare questo fatto per trovare l'inverso di ogni numero complesso diverso da zero. Supponiamo dunque che $z=a+bi$ sia diverso da zero e cerchiamo un numero complesso $w = x + yi$ tale che $zw = 1$. Svolgendo i calcoli otteniamo

$$zw = (ax - by) + (bx + ay)i,$$

dunque il sistema da risolvere è:

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

che affrontiamo in modo un po' insolito. Siccome $z \neq 0$, uno fra a e b è non nullo. Perciò moltiplichiamo i coefficienti della prima equazione per a e quelli della seconda equazione per b; sommando otteniamo

$$(a^2x - aby) + (b^2x + aby) = a$$

cioè l'equazione

$$(a^2 + b^2)x = a.$$

Ripetiamo il procedimento moltiplicando i coefficienti della prima equazione per $-b$ e quelli della seconda per a; sommando otteniamo

$$(-abx + b^2y) + (abx + a^2y) = -b$$

cioè l'equazione

$$(a^2 + b^2)x = -b.$$

In definitiva abbiamo

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Dunque

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}.$$

In questa scrittura $1/|z|^2$ è il risultato di un'operazione fra numeri reali, quindi già noto.

Ci si può chiedere qual è l'origine delle proprietà dell'operatore di coniugio. La risposta è abbastanza semplice: come un numero reale positivo ha *due* radici quadrate, ci aspettiamo che anche -1 ne abbia due nei numeri complessi. Queste radici sono infatti i e $-i$, ma non abbiamo alcun modo di "sceglierne una", come invece si può fare per i reali positivi, dove la scelta naturale è della radice quadrata positiva. Perciò tutto quello che facciamo partendo da i deve poter essere fatto anche con $-i$.

Un modo per rendere accettabili i numeri complessi, fino ad allora considerati con sospetto come numeri "fittizi", fu proposto da Gauss e perfezionato da Argand. Il numero complesso $z = a + bi$ è determinato dalla sua parte reale e dalla parte immaginaria e quindi determina le coordinate di un punto nel piano cartesiano. Si può anche considerare l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi come uno spazio vettoriale reale di dimensione due: una base è data da $\{1; i\}$. In effetti ogni numero complesso si scrive in uno e un solo modo come combinazione lineare a coefficienti reali di 1 e i. L'applicazione delle coordinate rispetto a questa base fornisce proprio il vettore che ha come prima componente la parte reale e come seconda componente la parte immaginaria.

L'interpretazione geometrica di Argand e Gauss dà anche un metodo per giustificare l'uso algebrico dei numeri complessi, trovandone un modello proprio nelle matrici. Ciò che segue può essere omesso in prima lettura e ripreso quando si siano studiati gli spazi vettoriali e le applicazioni lineari.

Se consideriamo un numero $z = a + bi \in \mathbb{C}$ fissato, l'applicazione $\mu_z \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da $\mu_z(w) = zw$ è lineare, considerando $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale sui reali, visto che supponiamo valide le regole di calcolo usuali. La sua matrice associata rispetto alla base $\{1; i\}$ è allora

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Infatti $\mu_z(1) = z \cdot 1 = z = a + bi$ e $\mu_z(i) = (a + bi)i = -b + ai$. Ora, dati $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, abbiamo

$$\mu_{z_1}(w) + \mu_{z_2}(w) = z_1 w + z_2 w = (z_1 + z_2) w = \mu_{z_1+z_2}(w)$$
$$\mu_{z_1}(\mu_{z_2}(w)) = z_1(z_2 w) = (z_1 z_2) w = \mu_{z_1 z_2}(w)$$

che in forma matriciale diventano

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix}$$

che sono esattamente la somma e il prodotto di matrici. Perciò abbiamo il risultato che cercavamo: il calcolo con i numeri complessi non può portare a contraddizioni, perché altrimenti otterremmo corrispondenti contraddizioni nel calcolo delle matrici a coefficienti reali.

Questa rappresentazione matriciale dei numeri complessi ha anche un'altra conseguenza. Supponiamo che $z = a + bi$ abbia modulo 1. Allora la matrice associata è ortogonale: infatti

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ab-ba \\ ba-ab & b^2+a^2 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2.$$

Inoltre

$$\det \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a^2 + b^2 = 1$$

e quindi è la matrice associata a una rotazione del piano (si veda il Capitolo ??). Eseguire la moltiplicazione zw di numeri complessi, con $|z| = w$, equivale a ruotare il punto del piano corrispondente a w di un certo angolo. Quale angolo? Il numero complesso z corrisponde a uno e un solo punto della circonferenza di centro nell'origine e raggio 1, quindi definisce in modo univoco un angolo α tale che $0 \le \alpha < 2\pi$.

Con semplici considerazioni di trigonometria si trova allora

$$a = \cos\alpha, \qquad b = \operatorname{sen}\alpha.$$

Se poi ci ricordiamo che ogni numero complesso z diverso da zero si può scrivere come $z = |z| w$ e che $|w| = 1$, abbiamo la *forma trigonometrica* dei numeri complessi

$$z = |z|(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$$

dove α è determinato a meno di multipli interi di 2π (come vedremo è utile considerare angoli qualsiasi). Il numero reale α si chiama *argomento* di z. La forma trigonometrica è particolarmente utile quando si devono eseguire moltiplicazioni di numeri complessi. Infatti, rinforzando l'intuizione che una moltiplicazione corrisponda a una rotazione, si ha, per $z_1 = |z_1|(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ e $z_2 = |z_2|(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)$,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1|\,|z_2|(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta) \\ &= |z_1 z_2|(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) + i(\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta) \\ &= |z_1 z_2|\big(\cos(\alpha+\beta) + i \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\big) \end{aligned}$$

Per giungere alla conclusione abbiamo usato le note formule della trigonometria. Il prodotto di due numeri complessi non nulli ha come modulo il prodotto dei moduli e come argomento la somma degli argomenti. In effetti la conoscenza di questo permette di usare i numeri complessi per ricordare le formule di addizione!

A corollario di questa discussione, menzioniamo la *formula di De Moivre*: se $z = |z|(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \neq 0$

$$z^n = |z|^n(\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha)$$

valida per ogni esponente n intero (per $n = -1$ ritroviamo l'espressione già nota per l'inverso). Come esempio di applicazione, possiamo ricavare le formule di triplicazione di seno e coseno:

$$\begin{aligned}(\cos 3\alpha + i \operatorname{sen} 3\alpha)^3 &= (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^3 \\ &= (\cos\alpha)^3 + 3i(\cos\alpha)^2 \operatorname{sen}\alpha + 3i^2 \cos\alpha(\operatorname{sen}\alpha)^2 + i^3(\operatorname{sen}\alpha)^3 \\ &= (\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \operatorname{sen}^2\alpha) + i(3\cos^2\alpha \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}^3\alpha)\end{aligned}$$

e perciò

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha \operatorname{sen}^2\alpha, \\ \operatorname{sen} 3\alpha &= 3\cos^2\alpha \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}^3\alpha.\end{aligned}$$

Un classico problema che si risolve in questo modo è quello di trovare le *radici n-esime* dei numeri complessi. Consideriamo $z \neq 0$ e cerchiamo tutti i numeri complessi w tali che $w^n = z$, con n intero positivo. Scrivendo z e w in forma trigonometrica

$$\begin{aligned}z &= |z|(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \\ w &= |w|(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)\end{aligned}$$

dobbiamo porre

$$w^n = |w|^n(\cos n\beta + i \operatorname{sen} n\beta) = |z|(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$$

e quindi, per cominciare, $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ (radice n-esima calcolata nei reali). La seconda uguaglianza da soddisfare è

$$\cos n\beta + i \operatorname{sen} n\beta = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha.$$

Due angoli che abbiano uguali coseno e seno devono differire per un multiplo intero di 2π, quindi avremo

$$n\beta = \alpha + 2k\pi \qquad (k \text{ intero}),$$

cioè

$$\beta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \qquad (k \text{ intero}).$$

Due soluzioni sono lo stesso numero complesso quando differiscono per multipli interi di 2π; ma da

$$\frac{\alpha + 2k\pi}{n} = \frac{\alpha + 2k'\pi}{n} + 2h\pi$$

ricaviamo

$$2k\pi = 2k'\pi + 2nh\pi$$

cioè $k - k' = nh$. Dunque esistono esattamente n soluzioni distinte, che si ottengono per i valori $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Per esempio, si vogliano calcolare le radici cubiche di $z = 8i$. Abbiamo $|z| = 8$ e $z = 8(\cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2))$ e quindi le radici cubiche sono

$$\begin{aligned}w_0 &= 2\left(\cos\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 0\cdot 2\pi\right) + i \operatorname{sen}\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 0\cdot 2\pi\right)\right), \\ w_1 &= 2\left(\cos\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 1\cdot 2\pi\right) + i \operatorname{sen}\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 1\cdot 2\pi\right)\right), \\ w_2 &= 2\left(\cos\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 2\cdot 2\pi\right) + i \operatorname{sen}\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 2\cdot 2\pi\right)\right),\end{aligned}$$

che, scritte in altra forma, sono

$$\begin{aligned}
w_0 &= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i,\\
w_1 &= 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i \operatorname{sen}\frac{5}{6}\pi\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i,\\
w_1 &= 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi\right) = 2(0 - i) = -2i.
\end{aligned}$$

È interessante allora notare che esistono in $\mathbb{C}$ esattamente n radici n-esime di 1; i punti corrispondenti nel piano di Argand-Gauss sono i vertici dell'n-agono regolare inscritto nella circonferenza di raggio 1 avente un vertice nel punto di coordinate $(1,0)$ che corrisponde al numero complesso 1.

Tuttavia la massima importanza dei numeri complessi risiede nel risultato dimostrato rigorosamente per la prima volta da Gauss nel 1799 come tesi di laurea.

Teorema fondamentale dell'algebra. *Ogni polinomio di grado positivo a coefficienti complessi ammette una radice complessa.*

Da esso si deduce il corollario che ogni polinomio a coefficienti reali può essere decomposto in fattori irriducibili di primo o secondo grado.

Sia infatti $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ un polinomio a coefficienti reali. La dimostrazione è per induzione sul grado.

Se $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare.

Sia $n > 1$. Se c è una radice reale di f (cioè $f(c) = 0$) possiamo dividere f per $X - c$, riducendo il problema a un polinomio di grado inferiore. Se invece c è una radice complessa non reale, possiamo calcolare

$$\begin{aligned}
f(\bar{c}) &= a_0 + a_1\bar{c} + a_2\bar{c}^2 + \cdots + a_n\bar{c}^n = \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\bar{c} + \overline{a_2}\,\bar{c}^2 + \cdots + \overline{a_n}\,\bar{c}^n\\
&= \overline{a_0 + a_1c + a_2c^2 + \cdots + a_nc^n}\\
&= \overline{f(c)} = \overline{0} = 0.
\end{aligned}$$

Dunque $\bar{c}$ è una radice di f *distinta* da c e perciò f è divisibile per

$$(X - c)(X - \bar{c}) = X^2 - (c + \bar{c})X + c\bar{c}$$

che è un polinomio a coefficienti reali. Il quoziente ha allora coefficienti reali e anche in questo caso ci siamo ridotti a un polinomio di grado inferiore.

Naturalmente la stessa tecnica permette di affermare che ogni polinomio di grado positivo a coefficienti complessi si scrive come prodotto di n fattori di primo grado. Sappiamo già come sfruttare questo risultato nello studio degli autovalori di una matrice.

Un altro modo di scrivere un numero complesso in forma trigonometrica si ottiene ponendo, secondo la definizione data da Euler,

$$\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha = e^{i\alpha},$$

dove e è il numero di Napier, base dei logaritmi naturali. La notazione è giustificata dalla proprietà già dimostrata che

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}.$$

In questo modo l'esponenziale viene esteso ai numeri complessi, definendo, per $z = a + bi$,

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b).$$

Si verifica immediatamente che vale l'usuale proprietà dell'esponenziale:

$$e^z e^{z'} = e^{z+z'}.$$

Non dobbiamo pensare a una "potenza" nel senso usuale; del resto nemmeno $e^{\sqrt{2}}$ lo è. Stiamo solo usando una notazione comoda perché, quando z è intero, e^z coincide con la potenza di esponente z. Si pone anche

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

Quando z è reale, $\cos z$ e $\operatorname{sen} z$ sono gli usuali coseno e seno:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} &= \frac{\cos z + i\operatorname{sen} z + \cos(-z) + i\operatorname{sen}(-z)}{2} = \frac{2\cos z}{2} = \cos z,\\
\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} &= \frac{\cos z + i\operatorname{sen} z - \cos(-z) - i\operatorname{sen}(-z)}{2i} = \frac{2i\operatorname{sen} z}{2i} = \operatorname{sen} z.
\end{aligned}$$

Queste estensioni ai complessi delle funzioni trigonometriche hanno le stesse proprietà che sui reali:

$$\begin{gathered}
\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1,\\
\operatorname{sen}(z+2\pi) = \operatorname{sen} z, \quad \cos(z+2\pi) = \cos z,\\
\operatorname{sen}(z+z') = \operatorname{sen} z \cos z' + \cos z \operatorname{sen} z',\\
\cos(z+z') = \cos z \cos z' - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} z',
\end{gathered}$$

come si verifica con un calcolo diretto.

Per esempio si vuole risolvere (nei complessi) l'equazione $\cos z = 2$ che sui reali non ha senso:

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 2$$

diventa

$$e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0$$

e, ponendo $w = e^{iz}$, troviamo $w^2 - 4w + 1 = 0$, da cui

$$w = 2 - \sqrt{3} \qquad \text{oppure} \qquad w = 2 + \sqrt{3}.$$

Scrivendo $z = x + yi$ si ha $iz = -y + xi$ e quindi $e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i\operatorname{sen} x)$. La prima equazione allora è

$$e^{-y}(\cos x + i\operatorname{sen} x) = 2 - \sqrt{3},$$

cioè $y = -\log(2-\sqrt{3})$ e $x = 2k\pi$ (k intero). Analogamente per la seconda.

La funzione esponenziale complessa ha molte proprietà che vengono sfruttate in elettrotecnica, oltre che a livello teorico.

Le matrici in $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ della forma

$$\begin{bmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{bmatrix}$$

sono tutte unitarie, a meno di un fattore reale: infatti

$$\begin{bmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{z} & \bar{w} \\ -w & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z\bar{z}+\bar{w}w & z\bar{w}-\bar{w}z \\ w\bar{z}-\bar{z}w & w\bar{w}+\bar{z}z \end{bmatrix} = (|z|^2+|w|^2)\mathbf{I}_2.$$

C'è un'eccezione, naturalmente, quando $z = w = 0$.

Notiamo che, quando z e w sono reali, questa matrice è proprio quella associata al numero complesso $z + wi$. Si può facilmente verificare che la somma e il prodotto di matrici di questo tipo è ancora una matrice dello stesso tipo. Inoltre l'inversa di una matrice di questa forma ha ancora la stessa forma: infatti

$$\det\begin{bmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{bmatrix} = |z|^2 + |w|^2$$

e, se la matrice è non nulla,

$$\begin{bmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|z|^2+|w|^2}\begin{bmatrix} \bar{z} & \bar{w} \\ -w & z \end{bmatrix}.$$

L'insieme di queste matrici ha quindi proprietà molto simili a quelle dei numeri reali e complessi, con l'eccezione della commutatività della moltiplicazione. In quanto spazio vettoriale sui reali, questo insieme che indichiamo con $\mathbb{H}$ ha dimensione 4: una base è data dalle matrici

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbb{i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbb{j} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}; \quad \mathbb{k} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Risulta

$$\begin{gathered} \mathbb{i}\,\mathbb{j} = \mathbb{k}, \qquad \mathbb{j}\,\mathbb{k} = \mathbb{i}, \qquad \mathbb{k}\,\mathbb{i} = \mathbb{j}, \\ \mathbb{j}\,\mathbb{i} = -\mathbb{k}, \quad \mathbb{k}\,\mathbb{j} = -\mathbb{i}, \quad \mathbb{i}\,\mathbb{k} = -\mathbb{j}, \\ \mathbb{i}^2 = \mathbb{j}^2 = \mathbb{k}^2 = \mathbb{i}\,\mathbb{j}\,\mathbb{k} = -\mathbb{1}. \end{gathered}$$

Se $z = a + ci$ e $w = b + di$, abbiamo

$$\begin{bmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + ci & -b + di \\ b + di & a - ci \end{bmatrix} = a\mathbb{1} + b\,\mathbb{i} + c\,\mathbb{j} + d\mathbb{k}$$

e da questa espressione possiamo, usando le regole di moltiplicazione viste sopra e quelle usuali, eseguire i calcoli. Queste matrici (o le espressioni equivalenti in termini di combinazioni lineari di $\mathbb{1}$, $\mathbb{i}$, $\mathbb{j}$ e $\mathbb{k}$) si chiamano *quaternioni* e furono scoperti da Hamilton nel 1810.

Il quaternione $\mathbb{1}$ ha la proprietà che $\mathbb{1}\,\mathbb{q} = \mathbb{q}\,\mathbb{1}$, per ogni $\mathbb{q} \in \mathbb{H}$. Inoltre tutte le proprietà usuali delle operazioni valgono, con l'eccezione della proprietà commutativa. Definiamo, per $\mathbb{q} = a\mathbb{1} + b\,\mathbb{i} + c\,\mathbb{j} + d\mathbb{k}$, il *coniugato* di $\mathbb{q}$ come

$$\bar{\mathbb{q}} = a\mathbb{1} - b\,\mathbb{i} - c\,\mathbb{j} - d\mathbb{k}.$$

Non si ha difficoltà a verificare che, scritto $\mathbb{q}$ come matrice

$$\mathbb{q} = \begin{bmatrix} a + ci & -b + di \\ b + di & a - ci \end{bmatrix}$$

si ha

$$\bar{\mathbb{q}} = \begin{bmatrix} a - ci & b - di \\ -b - di & a + ci \end{bmatrix} = \mathbb{q}^H$$

e quindi non c'è bisogno di calcoli per dedurre che

$$\overline{\mathbb{q} + \mathbb{r}} = \bar{\mathbb{q}} + \bar{\mathbb{r}}, \qquad \overline{\mathbb{q}\,\mathbb{r}} = \bar{\mathbb{r}}\,\bar{\mathbb{q}},$$

per ogni $\mathbb{q}, \mathbb{r} \in \mathbb{H}$. Si noti l'inversione dei fattori con la moltiplicazione. Abbiamo facilmente

$$\mathbb{q}\,\bar{\mathbb{q}} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\mathbb{1} = \bar{\mathbb{q}}\,\mathbb{q}.$$

Inoltre $\mathbb{q} = \bar{\mathbb{q}}$ se e solo se $b = c = d = 0$. In questo caso si parla di *quaternioni reali*, che sono *una copia* dei numeri reali all'interno di $\mathbb{H}$, cioè un sottoinsieme che ha le stesse proprietà algebriche dei numeri reali.

Il *modulo* di $\mathbb{q} = a\mathbb{1} + b\,\mathbb{i} + c\,\mathbb{j} + d\mathbb{k}$ è

$$|\mathbb{q}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

e valgono ancora le proprietà

$$|\mathbb{q}\,\mathbb{r}| = |\mathbb{q}|\,|\mathbb{r}|, \qquad |\mathbb{q} + \mathbb{r}| \le |\mathbb{q}| + |\mathbb{r}|.$$

Il coniugato e il modulo permettono di scrivere l'inverso di un quaternione esattamente come nel caso dei numeri complessi: se $\mathbb{q} \in \mathbb{H}$ e $\mathbb{q} \neq 0$, allora

$$\mathbb{q}^{-1} = \frac{1}{|\mathbb{q}|^2}\bar{\mathbb{q}}.$$

Infatti

$$\Bigl(\frac{1}{|\mathbb{q}|^2}\bar{\mathbb{q}}\Bigr)\mathbb{q} = \frac{1}{|\mathbb{q}|^2}|\mathbb{q}|^2\mathbb{1} = \mathbb{1} = \mathbb{q}\Bigl(\frac{1}{|\mathbb{q}|^2}\bar{\mathbb{q}}\Bigr).$$

Sembrerà paradossale che in $\mathbb{H}$ esistano almeno sei quaternioni il cui quadrato è $-\mathbb{1}$: $\mathbb{i}$, $-\mathbb{i}$, $\mathbb{j}$, $-\mathbb{j}$, $\mathbb{k}$ e $-\mathbb{k}$. Di fatto ne esistono infiniti. Se infatti calcoliamo a partire da $\mathbb{q} = a\mathbb{1} + b\,\mathbb{i} + c\,\mathbb{j} + d\mathbb{k}$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{q}^2 &= a\mathbb{1}a\mathbb{1} + a\mathbb{1}b\,\mathbb{i} + a\mathbb{1}c\,\mathbb{j} + a\mathbb{1}d\mathbb{k} + \\
&\quad b\,\mathbb{i}\,a\mathbb{1} + b\,\mathbb{i}\,b\,\mathbb{i} + b\,\mathbb{i}\,c\,\mathbb{j} + b\,\mathbb{i}\,d\mathbb{k} + \\
&\quad c\,\mathbb{j}\,a\mathbb{1} + c\,\mathbb{j}\,b\,\mathbb{i} + c\,\mathbb{j}\,c\,\mathbb{j} + c\,\mathbb{j}\,d\mathbb{k} + \\
&\quad d\mathbb{k}a\mathbb{1} + d\mathbb{k}b\,\mathbb{i} + d\mathbb{k}c\,\mathbb{j} + d\mathbb{k}d\mathbb{k} \\
&= a^2\mathbb{1} + ab\,\mathbb{i} + ac\,\mathbb{j} + ad\mathbb{k} + \\
&\quad ab\,\mathbb{i} - b^2\mathbb{1} + bc\mathbb{k} - bd\,\mathbb{j} + \\
&\quad ac\,\mathbb{j} - bc\mathbb{k} - c^2\mathbb{1} + cd\,\mathbb{i} + \\
&\quad ad\mathbb{k} + bd\,\mathbb{j} - cd\,\mathbb{i} - d^2\mathbb{1} \\
&= (a^2 - b^2 - c^2 - d^2)\mathbb{1} + 2ab\,\mathbb{i} + 2ac\,\mathbb{j} + 2ad\mathbb{k}.
\end{aligned}$$

Otteniamo come soluzioni tutti i quaternioni $\mathbb{q} = a\mathbb{1} + b\,\mathbb{i} + c\,\mathbb{j} + d\mathbb{k}$ tali che

$$a = 0 \quad \text{e} \quad b^2 + c^2 + d^2 = 1,$$

cioè tutti i quaternioni con parte reale nulla e modulo 1. Non si tratta di una contraddizione: siccome la moltiplicazione non è commutativa, alcuni fatti che valgono per i numeri reali o complessi non valgono per i quaternioni.

Moltiplichiamo fra loro due quaternioni con *parte reale* nulla:

$$\begin{aligned}
&(b\,\mathbb{i} + c\,\mathbb{j} + d\mathbb{k})(b'\,\mathbb{i} + c'\,\mathbb{j} + d'\mathbb{k}) \\
&\qquad = -(bb' + cc' + dd')\mathbb{1} + (cd' - dc')\,\mathbb{i} + (db' - bd')\,\mathbb{j} + (bc' - cb')\mathbb{k}.
\end{aligned}$$

Se identifichiamo il quaternione $b\,\mathbb{i} + c\,\mathbb{j} + d\mathbb{k}$ con il vettore dello spazio tridimensionale con la stessa espressione in termini dei tre vettori coordinati, abbiamo che il prodotto esprime nella parte reale l'opposto del prodotto scalare e, nella *parte vettoriale*, il prodotto esterno.

Questa proprietà permette di applicare il formalismo dei quaternioni allo studio dei campi elettromagnetici, ricavando formule compatte che sottolineano bene l'interazione fra potenziale elettrico, espresso da un quaternione reale, e vettore potenziale magnetico, espresso da un quaternione con parte reale nulla.

Un'altra interessante applicazione dei quaternioni è allo *spazio di Minkowski*, ambiente ideale per lo studio della relatività speciale: la parte reale rappresenta la coordinata temporale, la parte vettoriale le coordinate spaziali.

Dal punto di vista algebrico, i quaternioni permettono di dimostrare in modo molto elegante un teorema dovuto a Lagrange: *ogni intero positivo si può scrivere come somma di quattro quadrati di interi.*

Un risultato importante, dovuto a Hurwitz, mostra che i numeri complessi e i quaternioni sono le uniche strutture che estendono i numeri reali mantenendone le proprietà formali (esclusa la commutatività della moltiplicazione), a meno di isomorfismi. Esiste comunque un'altra estensione, gli *ottetti* di Cayley e Graves, dove però non vale più l'associatività della moltiplicazione.

Esempio. I quaternioni forniscono anche un gruppo dalle proprietà particolari: si prenda infatti

$$Q_8 = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}, \mathbb{i}, -\mathbb{i}, \mathbb{j}, -\mathbb{j}, \mathbb{k}, -\mathbb{k}\}.$$

Il prodotto di due elementi di Q_8 appartiene a Q_8, che quindi è un sottogruppo di $\mathbb{H} \setminus \{0\}, \cdot$. L'ordine degli elementi è: 1 per $\mathbb{1}$, 2 per $-\mathbb{1}$, 4 per gli altri. Perciò i sottogruppi propri di Q_8 sono:

$$\begin{gathered}
\{\mathbb{1}\}, \\
\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}, \\
\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}, \mathbb{i}, -\mathbb{i}\}, \quad \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}, \mathbb{j}, -\mathbb{j}\}, \quad \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}, \mathbb{k}, -\mathbb{k}\}.
\end{gathered}$$

Si verifica facilmente che $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$ è normale in Q_8; $\{\mathbb{1}\}$ è normale; i sottogruppi di ordine 4 hanno indice 2, quindi sono normali. Dunque Q_8 è un gruppo non abeliano nel quale tutti i sottogruppi sono normali.