

Prova scritta per il Corso di ALGEBRA LINEARE
25 febbraio 2014

Nota: Per ogni risposta è indispensabile fornire calcoli e/o spiegazioni !

1. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) Si determinino il polinomio caratteristico e gli autovalori di A . (2 punti)
- (b) Per ogni autovalore λ di A si determini una base dell'autospazio corrispondente. (4 punti)
- (c) Si trovino una matrice ortogonale $S \in O(3)$ e una matrice diagonale $D \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tali che $S^H A S = D$. (4 punti)
- (d) Si calcoli il volume del parallelepipedo costruito sulle colonne di A . (2 punti)

2. Si considerino il piano

$$\mathcal{P}_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

e i piani $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ dati dalle equazioni cartesiane

$$\mathcal{P}_2 : x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$\mathcal{P}_3 : 3x_1 + x_2 = 2$$

- (a) Si determini l'equazione cartesiana di \mathcal{P}_1 . (2 punti)
 - (b) Si determini il punto di intersezione dei tre piani $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$. (4 punti)
3. Si decida se le seguenti applicazioni $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sono lineari e in caso positivo si determinino la matrice associata ad f rispetto alla base canonica e l'immagine di f .

(a) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x + 2 \\ y \end{pmatrix}$

(b) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x + y \\ y \end{pmatrix}$

(c) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x + y \\ xy \end{pmatrix}$ (8 punti)

4. Vero o falso? Si motivi la risposta!

Una matrice $A \in M_{n \times n}$ è ortogonale se tutti gli autovalori di A hanno norma 1.

(4 punti)

Nome: **Matricola:** **Punteggio totale:**