

$\mathbb{C}$ : campo complesso

- algebricamente chiuso
- interpretazione geometrica (piano di Argand-Goursat)

TOPOLOGIA E GEOMETRIA  
DIFFERENZIALE a.a. 2009/10

Prof. M. Spina

Cenni agli integrali abeliani

★ Non possibile una struttura di campo ordinato compatibile con quella di  $\mathbb{R}$

Estensione di  $\mathbb{C}$ : la sfera di Riemann

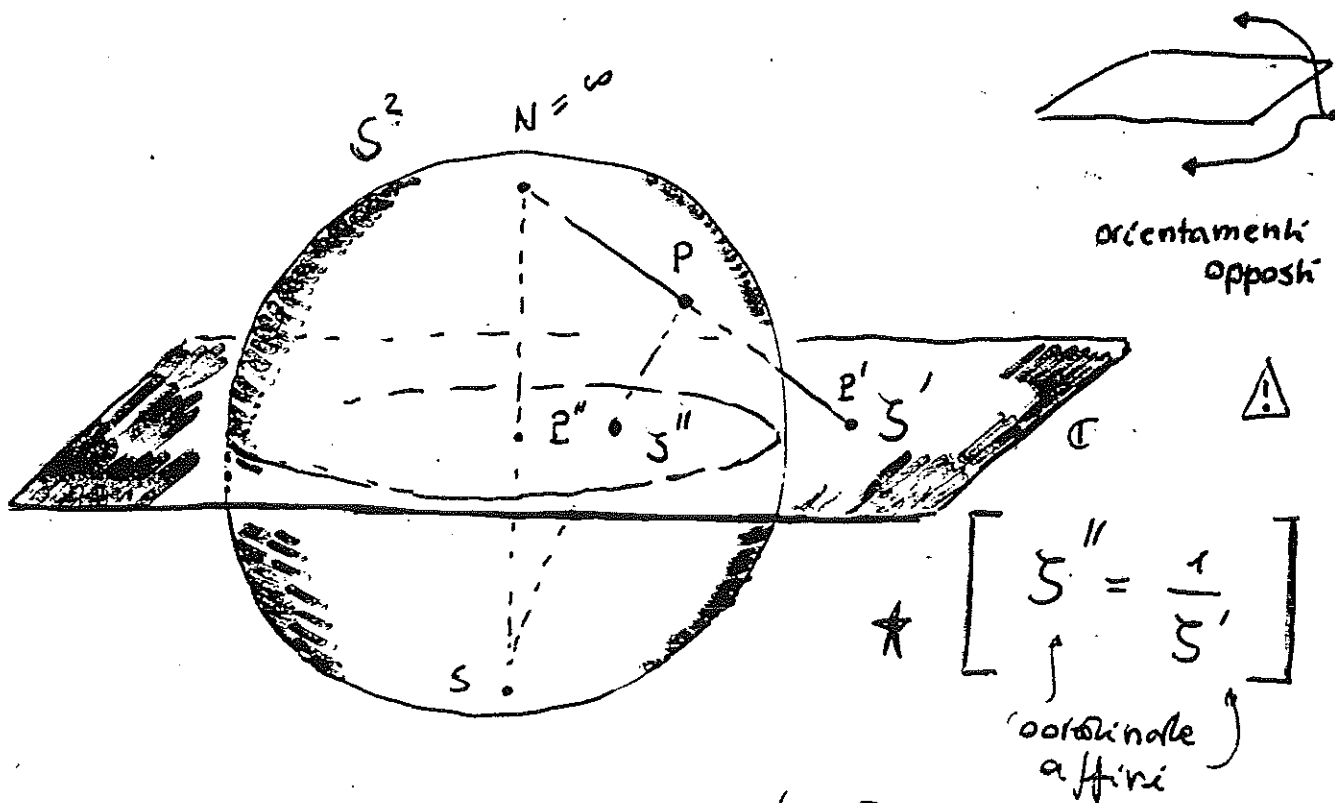
$$\cong \mathbb{P}(\mathbb{C})$$

retta proiettiva complessa

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$\cong S^2$

★ proiezione stereografica



$$\star \left[ \begin{array}{c} \zeta'' = \frac{1}{\zeta'} \\ \uparrow \\ \text{coordinata affini} \end{array} \right]$$

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}) = \left\{ (z_0:z_1), (z_0, z_1) \neq (0,0) \right\} \quad \begin{array}{l} \zeta' = \frac{z_1}{z_0} \\ \zeta'' = \frac{z_0}{z_1} \end{array}$$

cf. mappe per raggi vettori reciproci

# Lemma sugli integrali abeliani

Premessa

Legli integrali del tipo

$$\int R(x, \underbrace{\sqrt{x^2 + ax + b}}_y) dx$$

↑  
f. razionali

$$y = t(x - \mu)$$

( $\lambda, \mu$  rad. reali e distinte)

$$y = tx + \sqrt{b}$$

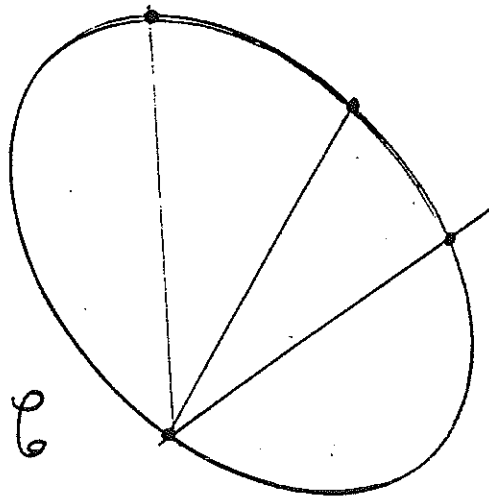
(per  $cx + b \geq 0$ )

sono risolvibili in forma chiusa. la ragione profonda di ciò è geometrica

$$\mathcal{C}: y^2 = x^2 + ax + b$$

è una conica in  $\mathbb{P}^2$  ( $x, y$  coord. affini o euclidee)

$\mathcal{C} \cong \mathbb{P}^1$   
retta proiettiva complessa  
(topologicamente una sfera)



e dunque razionale

considerando in particolare

$$\int \frac{dx}{y}$$

e posto  $t = t(x, y)$  coord. affini su  $\mathbb{P}^1$ , si ha:

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{dx}{y} = \int_{t(x_0, y_0)}^{t(x, y)} \mathcal{R}(t) dt$$

↑  
f. razionale

L'integrale si risolve facilmente.

La dipendenza dal cammino coinvolge  
i residui di  $\frac{dx}{y}$  (in fatti  $\frac{dx}{y}$

è chiusa e  $\mathbb{P}^1$  è semplicemente  
connesso)

Consideriamo ora

$$(*) \int \frac{dx}{\sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c}}$$

o, più in generale

$$(**) \int R(x, y) dx$$

↑ integrale  
abeliano

con  $f(x, y) = 0$

↑  
polinomio di  
grado  $> 2$

Per ex. in (\*\*) è  $\mathbb{C} : y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$

ellittica

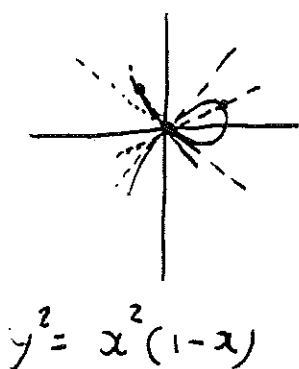
Ricordando la formula generale

$$g = \frac{n(n-1)}{2} - \text{cuspidi} - \text{nodi}$$

↑  
genere

n: grado

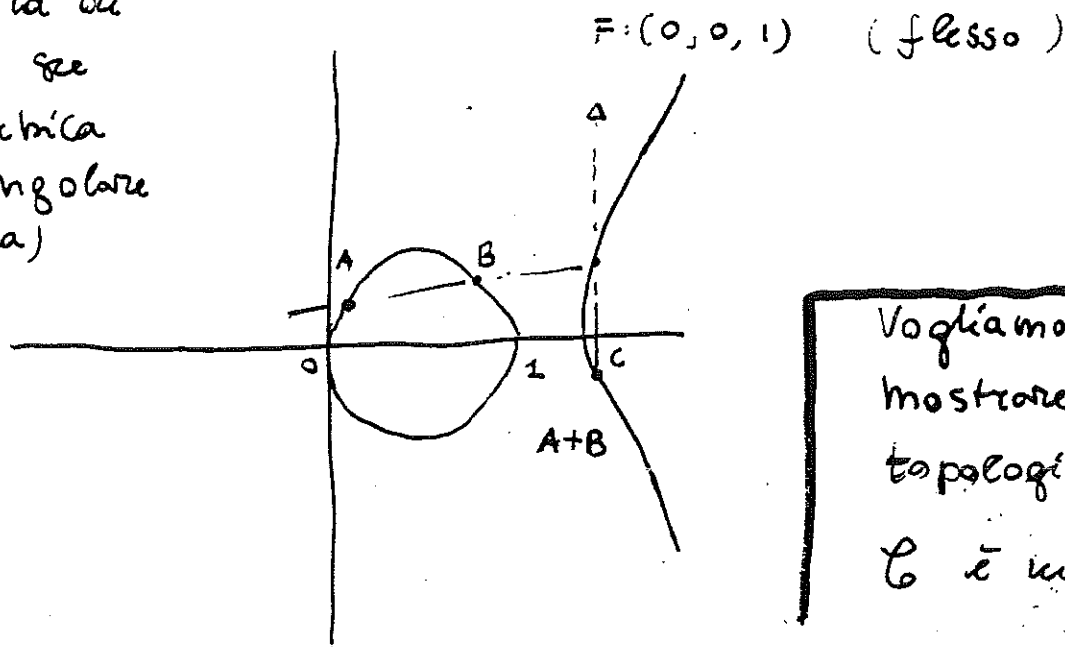
si vede che se  $n=3$  può esserci al più un pto doppio: per una cubica nodata si ha  $g=0$  epperò  $\mathbb{C}$  è razionale



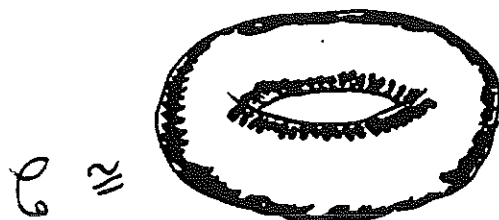
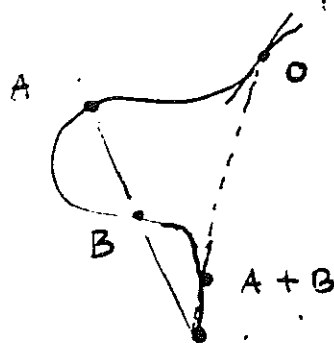
Ma se  $\mathbb{C}$  è liscia si ha  $g=1$  e l'integrale non è risolvibile

es:  $y^2 = x(x-1)(x-c)$   
 cubica di Weierstrass  $c \neq \{0,1\}$

Struttura di gruppo se una cubica non singolare (ellittica)



Vogliamo mostrare che topologicamente  $\mathbb{C}$  è un toro



# ↳ Torno al concetto di superficie di Riemann

Sorge quando si affronta il problema di   
 invertire le funzioni elementari nel campo   
 complesso: ci si imbatte nel fenomeno della   
 POLIDROMIA

ex:  $z^n = a$   $a \neq 0$  radici  $n$ -esime di  $a$

$z = \rho e^{i\varphi}$   $\rho^n e^{in\varphi} = |a| e^{i\varphi_a}$

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

arg. determinato a meno di   
 multipli interi di  $2\pi$

$\Rightarrow \rho = |z| = |a|^{\frac{1}{n}}$

$n\varphi = \varphi_a + 2k\pi$   $k \in \mathbb{Z}$

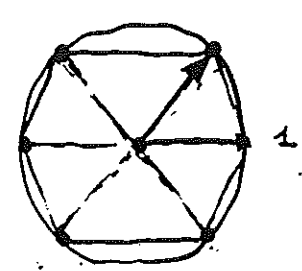
$\varphi = \frac{\varphi_a}{n} + \frac{R}{n} 2\pi$   $R = 0, 1, \dots, n-1$

$z_k = |a|^{\frac{1}{n}} e^{i \left( \frac{\varphi_a}{n} + \frac{R}{n} 2\pi \right)}$

$n$  radici distinte

$k = 0, 1, \dots, n-1$

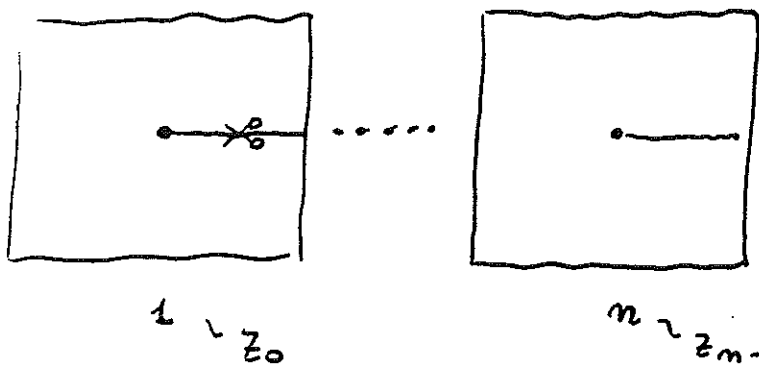
$a = 1$



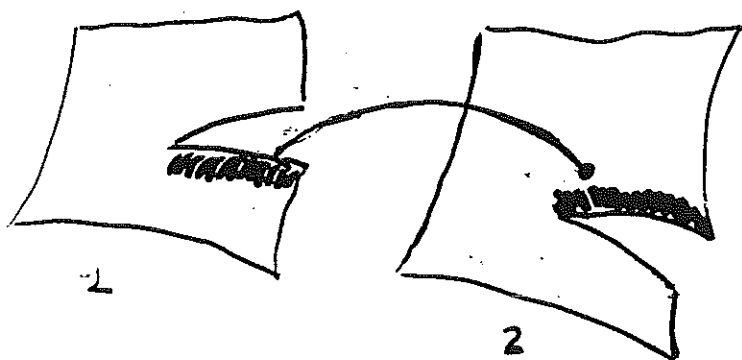
# ☆☆☆ Idea di Riemann

Rimpiazzare  $\mathbb{C}$  con  $n$  copie di

$\mathbb{C}$  tagliato, per ex. lungo il semiasse  
reale positivo



si incollano per esempio il lembo inferiore  
del foglio 1 con il lembo superiore del foglio  
2 etc .. il lembo inferiore del foglio  $n$   
va incollato al lembo superiore del foglio 1 (⚠)



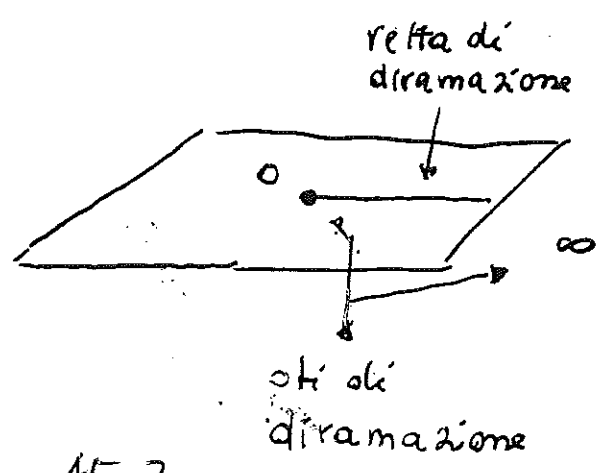
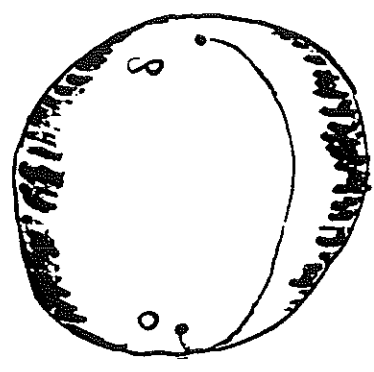
Il risultato può essere visualizzato

più o meno (molto meno che più !!)

Così:



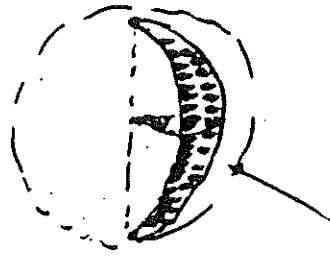
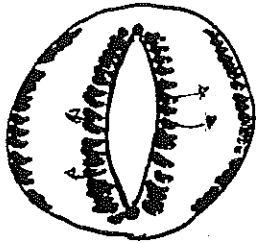
Inoltre, ricapitolando ogni  $\mathbb{C}$  con una  
 Sfera di Riemann  $\mathbb{P}^1$ , tutto avviene  
 in un semplice



A5-7

( Anche il polo  $\infty$  viene descritto allo stesso modo per la inversione  $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta}$  )

Si ha successivamente, a livello topologico

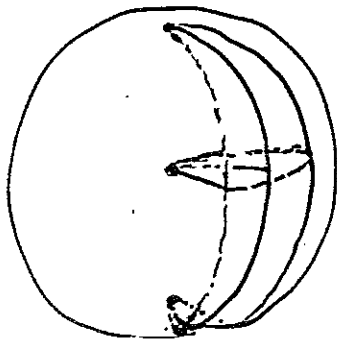


$$\frac{2\pi}{n}$$

si ricollamo  $n$  spicchi e si ricopre ancora una sfera:

$$S^2 \rightarrow S^2$$

$$\zeta \mapsto \zeta^n$$



**ricoprimento ramificato a  $n$  fogli**

$$z = \zeta^n$$

parametro uniformizzante

È chiaro come si passi da uno spicchio all'altro e in particolare da  $n$  ad 1

Ora  $0$  e  $\infty$  possono essere sovrapposti da due poli qualsiasi (distinti), basta effettuare, per es. un'opportuna trasformazione di Möbius

$$\zeta \mapsto \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$$

$$ad - bc \neq 0 \quad \text{in}$$

generale, dati  $z_i \mapsto w_i \quad i=1,2,3$ , la transf.

è univocamente individuata da

$$\star \left[ \frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \right]$$

$\star$  invarianza del rapporto per omografie in  $\mathbb{P}^1$

dal chiarissimo significato geometrico  $\star$  15-8



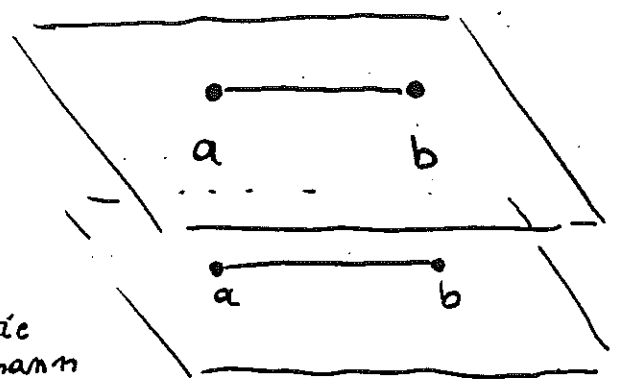
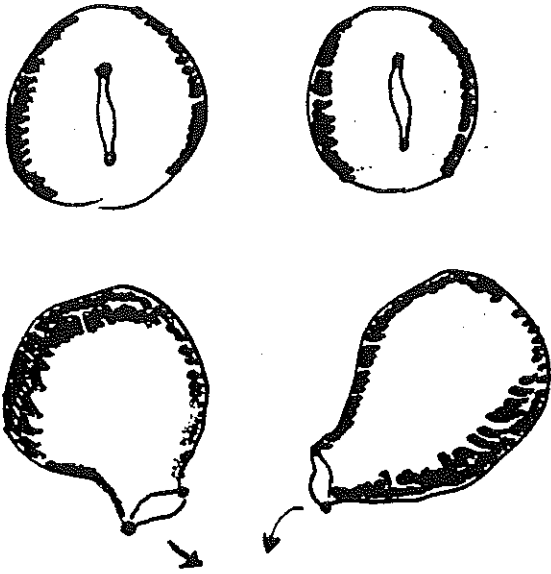
Poniamo ora  $n = 2$

e siamo a  $\neq b$ ,  
 $a, b \in \mathbb{R}$

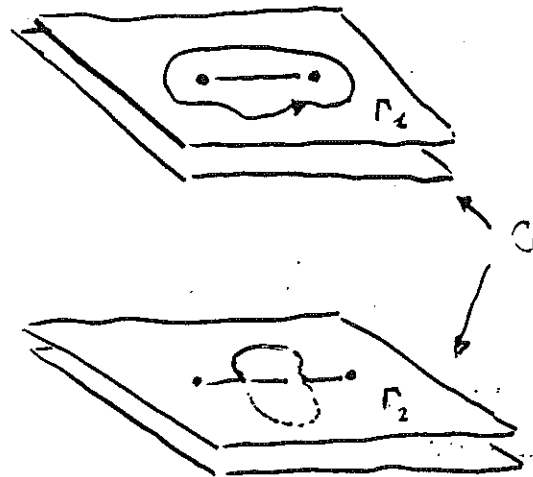
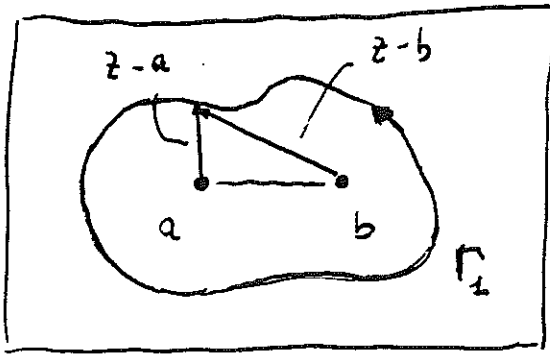
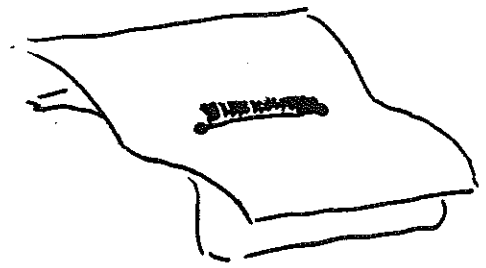
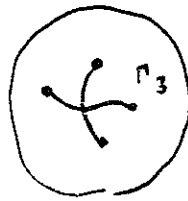
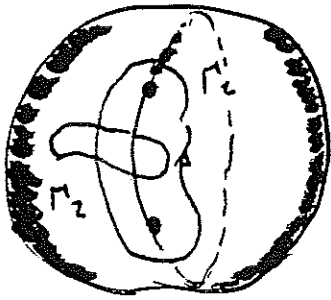
per fissare le idee

$$W^2 = (2-a)(2-b)$$

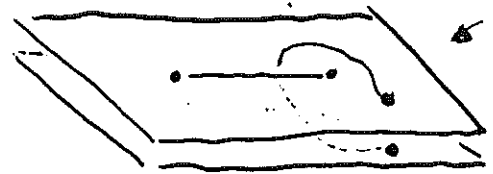
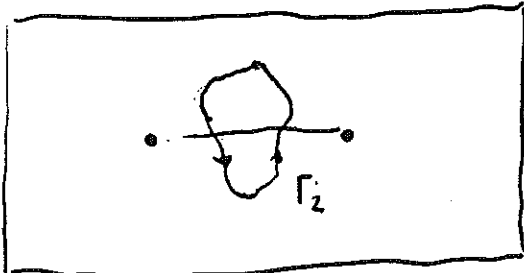
$\mathcal{C}$  Conica  
 irriducibile



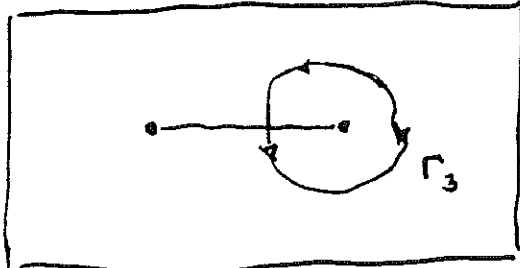
$\Sigma_{\mathcal{C}}$  superficie  
 di Riemann  
 di  $\mathcal{C}$



cicli  
 su  $\Sigma_{\mathcal{C}}$



non è  
 un ciclo



# Qualche dettaglio

$$f = f(z) = (z-a)(z-b)$$

$$\Delta_{\Gamma_2} f = 2\pi + 2\pi = 4\pi$$

variazione  
totale dell'  
argomento  
di  $f$  quando  
2 viaggi su

$$\left[ \Delta_{\Gamma_2} \sqrt{f} = 2\pi \right]$$

$$\Delta_{\Gamma_2} \sqrt{f} = 2\pi$$

$$\star \Delta_{\Gamma_3} \sqrt{f} = \pi$$

in generale  $\Gamma_k$

$$\left( = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{f'}{f} dz \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} d \log f$$

altro non è che (inside  
di avvolgimento  $\star$  di  $f(r)$   
attorno all'origine del  
"piano  $w$ " :  $w = f(z)$ )

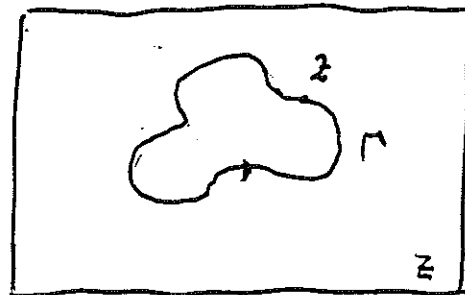
$$\star \log z = \log |z| + i\varphi$$

$\star$  polidromia

argomento  
(ind. a meno  
di  $2k\pi$ ,  
 $k \in \mathbb{Z}$ )

$\Sigma \log$  consta di

infiniti fogli  
incollati come nel caso  
precedente

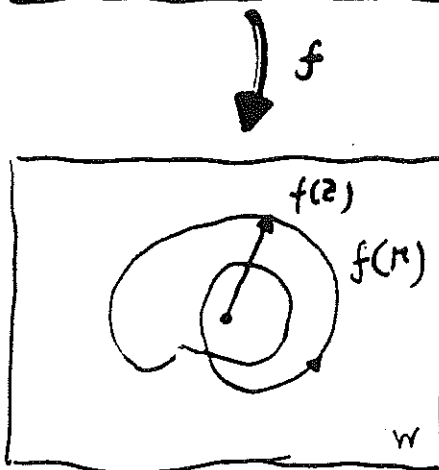


$\star$

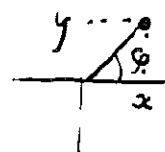
$$\text{ind}_{\gamma}(0) =$$



$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$



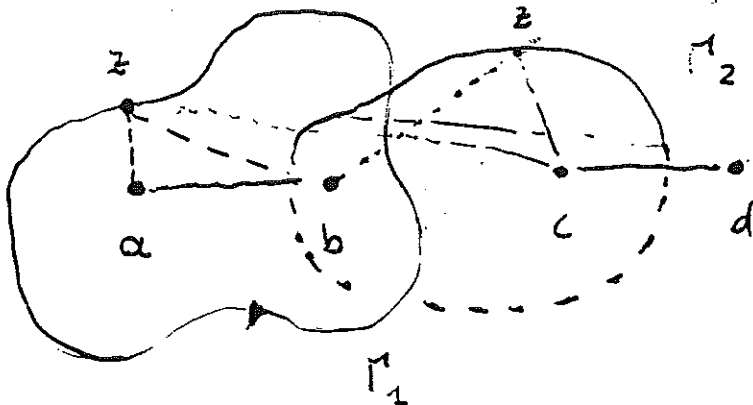
$$\left[ d\varphi = d \arctg \frac{y}{x} = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \right]$$



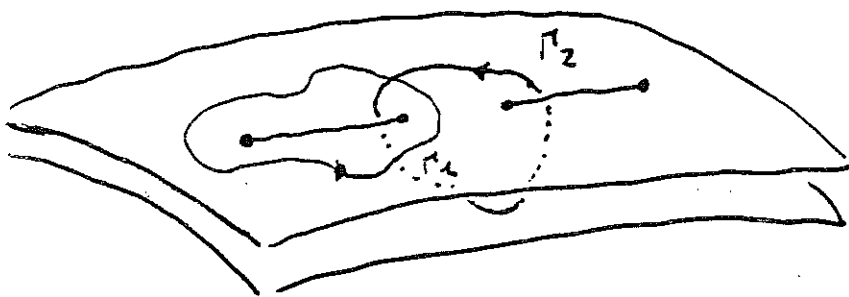
Sia ora  $W^2 = f(z) = (z-a)(z-b)(z-c)(z-d)$

Come in figura

★ il ragionamento che segue vale anche per un polinomio di 3° grado: basta immaginare  $d = \infty$

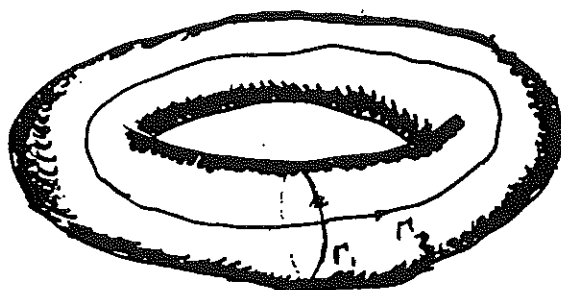
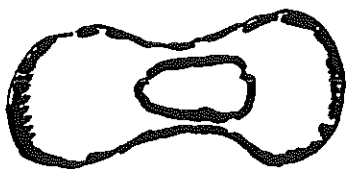
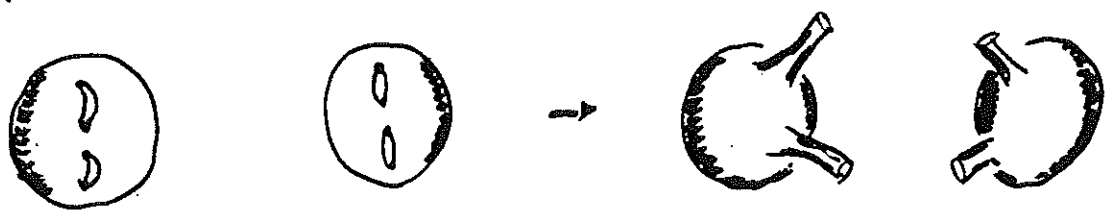


Si trova  $\Delta_{\gamma_1} \sqrt{f} = \Delta_{\gamma_2} \sqrt{f} = 2\pi$



...: nel foglio sottostante

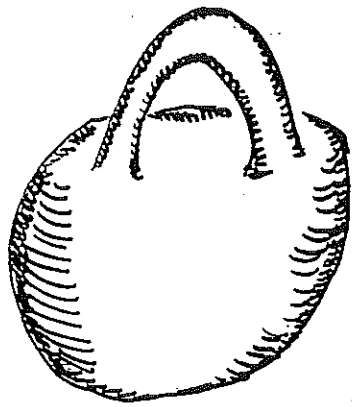
Aggiungendo i phi' alc' inf. in entrambe le copie



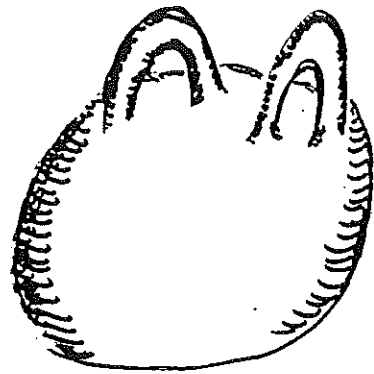
★  $g = 1$  toro

interpretazione topologica:

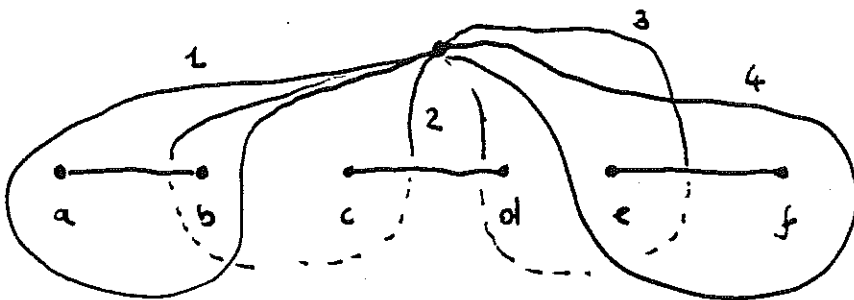
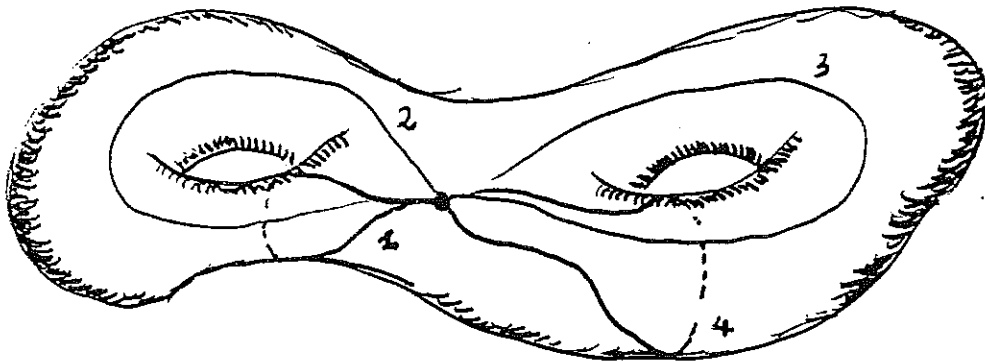
# buchi di  
 liscia sup.  
 compatta  
 e senza bordo



$$g = 1$$



$$g = 2$$



$$W^2 = (z-a)(z-b) \cdot (z-c)(z-d) \cdot (z-e)(z-f)$$

In generale si ottengono le cosiddette  
superfici di Riemann iperellittiche

✱ Ciò chiarisce il motivo della non risolubilità  
degli integrali abeliani in termini di f. elementari,  
e della necessità di introdurre allo scopo nuove  
funzioni, le funzioni ellittiche...