5. INSIEMI INFINITI

PROBLEMATICHE SULLA NUMEROSITÀ DEGLI INSIEMI INFINITI.

Fintantoché gli insiemi che si considerano sono finiti (cioè si può contare quanti sono i loro elementi mettendoli in corrispondenza biiettiva con i numeri che precedono un certo numero naturale) la nozione di insieme può fornire un comodo modo di esprimersi, ma non è indispensabile. Di fatto Cantor per primo elaborò la nozione di insieme per risolvere problemi di quantità di elementi in insiemi infiniti (cioè non finiti).

Si dice che una classe ha tanti elementi quanto un'altra quando c'è una biiettività tra le due classi. In tal caso si dirà anche che le due classi sono equinumerose, o che hanno lo stesso numero di elementi, o che hanno la stessa cardinalità.

Si dice che un insieme A è <u>finito</u> se esistono un numero naturale n e una biiettività da A sull'insieme dei numeri naturali che precedono n. Se ciò non succede, si dice che l'insieme è <u>infinito</u> (si sta supponendo una minima conoscenza dei numeri naturali).

Se un insieme, A, è finito e un altro insieme, B, è contenuto propriamente (contenuto ma non uguale) in A allora A e B non sono equinumerosi, cioè non c'è alcuna biiettività tra i due. Questo risultato dipende dal fatto che per nessun numero naturale ci può essere una biiettività tra l'insieme dei numeri che lo precedono e l'insieme di quelli che precedono un diverso numero naturale. Però questo risultato non si estende agli insiemi infiniti.

Questa ultima affermazione si può giustificare con un contro esempio. I numeri pari sono un sottinsieme proprio dei numeri naturali, ed entrambi gli insiemi non sono finiti; inoltre la funzione che ad un numero naturale associa il suo doppio è una biiettività dai numeri naturali sui numeri pari. Così si deve dire che i numeri naturali sono tanti quanti i numeri pari pur costituendo questi un sottinsieme proprio dell'insieme dei naturali.

Per gli insiemi finiti non solo si può dire se hanno lo stesso numero di elementi, ma anche se uno ha più elementi di un altro o meno. Per fare ciò ci si rifà alla relazione d'ordine naturale tra i numeri naturali che contano gli elementi di ciascuno dei due insiemi. Per gli insiemi infiniti non si può utilizzare lo stesso metodo. Come decidere allora quando un insieme ha più o meno elementi di un altro?

Anzitutto ci si potrebbe limitare a specifici casi più facili, ad esempio il confronto tra un insieme ed un suo sottinsieme proprio, e, non potendo affermare che il sottinsieme ha strettamente meno elementi dell'insieme che lo contiene a causa del contro esempio appena visto, si potrebbe decidere di considerare la quantità dei suoi elementi non maggiore di (cioè minore od uguale a) quella degli elementi dell'insieme che lo contiene. Nel caso più generale si potrebbe dire che un insieme ha non più elementi di un altro insieme se ha tanti elementi quanti quelli di un sottinsieme dell'altro insieme; cioè se c'è una biiettività tra il primo insieme e un sottinsieme del secondo, ma tale biietttività è una funzione iniettiva totale dal primo insieme nel secondo. Si noti che la caratterizzazione proposta per dire quando un insieme non ha più elementi di un altro è in accordo con la caratterizzazione che va bene per gli insiemi finiti di avere un numero di elementi minore del numero di elementi dell'altro insieme. (Esercizio: si provi ciò)

Queste considerazioni motivano la seguente definizione. Si dirà che il <u>numero degli elementi di un insieme è minore o uguale al numero di elementi di un secondo insieme</u>, o anche che <u>la cardinalità del primo insieme è minore o uguale alla cardinalità del secondo insieme</u>, se c'è una funzione iniettiva totale dal primo al secondo insieme.

Ma a questo punto sorge prepotente un problema: la relazione introdotta tra insiemi è una relazione d'ordine? Se si, di che tipo?

Se è un ordine, non è un ordine stretto, per come è stato introdotto, e non è un ordine sugli insiemi. Infatti, se così fosse, dovrebbe valere la proprietà antisimmetrica. cioè se un insieme ha un numero di elementi minore od uguale al numero di elementi di un altro e questo ha un numero di elementi minore od uguale al numero di elementi del primo allora i due sono lo stesso insieme: ma due diversi insiemi equinumerosi hanno una iniettività totale da uno nell'altro in entrambe le direzioni (la biiettività tra uno e l'altro e l'inversa di questa, che è ancora una biiettività, sono anche funzioni iniettive e totali nelle direzioni volute), sicché sono uno minore dell'altro, ma non sono uguali proprio per come sono stati scelti.

Così la relazione introdotta non è una relazione d'ordine tra insiemi. Potrebbe esserlo tra le cardinalità degli insiemi, ma cosa sono le cardinalità degli insiemi? Sono le quantità di elementi, ma in che senso? Precisare cosa debba intendersi per cardinalità anche di insiemi infiniti è un difficile problema che Cantor affrontò con il massimo impegno. Per ora non si definirà il concetto di cardinalità, ma si useranno le espressioni "ugual cardinalità" o "cardinalità minore od uguale" per indicare che tra due insiemi c'è una biiettività o una iniettività totale, rispettivamente, mentre l'espressione "cardinalità di un insieme" indicherà che tra quell'insieme ed un altro ci possono essere relazioni di equinumerosità o minore od uguale numerosità. Sfruttando questi concetti, si cercherà di trovare delle loro proprietà che permettano eventualmente di definire opportunamente la nozione di cardinalità di un insieme come un qualcosa in sé, e non come la considerazione di una relazione di equinumerosità o meno con qualche altro insieme. Per sottolineare la distinzione si potrà riferirsi alla relazione di equinumerosità parlando di numerosità di un insieme, ma si userà anche la dizione cardinalità di un insieme, secondo l'usanza, auspicando che ciò non sia causa di confusione una volta denunciata la possibilità di equivoco.

PROPRIETA' DELLA NUMEROSITA' DI INSIEMI INFINITI.

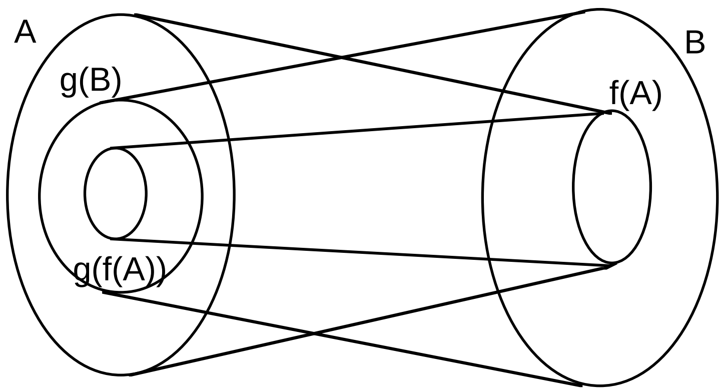
Anzitutto si ricordi quanto già definito:
a) un insieme A ha ugual cardinalità di un insieme B se esiste una biiettività da A su B.,
b) un insieme A ha cardinalità minore od uguale alla cardinalità di un insieme B se esiste una funzione totale iniettiva da A in B. (una funzione da un primo insieme in un altro è detta totale se il suo dominio coincide con il primo insieme)

Si vuole mostrare che la relazione, appena richiamata, tra cardinalità di essere minore od uguale è una relazione d'ordine, mostrando che è riflessiva, transitiva e antisimmetrica.

La proprietà riflessiva in questo caso si formula così: ogni cardinalità è minore od uguale a se' stessa. Detta così sembrerebbe una affermazione ovvia, ma non lo è altrettanto se si ricorda qual'è il significato dato alle espressioni usate. In effetti, poiché potrebbero esserci più insiemi della stessa cardinalità, diciamo A e B, si richiede di dimostrare che c'è anche una funzione totale iniettiva da A in B. Di fatto è proprio così perché la funzione biiettività da A su B, che c'è perché A e B hanno la stessa cardinalità, e', tra l'altro, una iniettività totale da A in B.

Per mostrare la proprietà transitiva si osservi che, date le due funzioni totali e iniettive f_1 e f_2 rispettivamente da un insieme A in un insieme B e da B in un insieme C, la funzione composta $f_2(f_1)$ è una funzione totale iniettiva da A in C, che è quello che si voleva far vedere che c'è. Si noti che la totalità della funzione composta non deriva dal fatto che la composizione di funzioni totali è una funzione totale (affermazione falsa nella sua generalità), quanto piuttosto dal fatto che il dominio della seconda funzione contiene il codominio della prima e che questa è totale.

Rimane da mostrare la proprietà antisimmetrica, cioè che se la cardinalità di un insieme A è minore od uguale a quella di un secondo insieme B e questa è minore od uguale a quella di A allora i due insiemi hanno la stessa cardinalità.



In base alle definizioni delle nozioni che si stanno considerando, si deve mostrare che se c'è una funzione totale iniettiva f da A in B e una funzione totale iniettiva g da B in A allora c'è una biiettività tra A e B. La situazione in ipotesi può essere rappresentata dalla precedente figura.

Se si potesse costruire una biiettività h tra A e g(B), otterremo anche la biiettività voluta componendo le funzioni h e g^{-1} essendo g^{-1} una biiettività dal codominio di h, che è g(B), su B (si ricordi che g è iniettiva sicché la sua inversa è una funzione iniettiva dal codominio di g, che è g(B), sul dominio di g, che è B). Si osservi anche che nella situazione che si sta considerando c'è anche una biiettività tra A e il suo sottinsieme g(f(A)) dal momento che la funzione composta g(f) è iniettiva (in quanto composizione di funzioni iniettive) totale (in quanto composizione di funzioni la prima totale e con il dominio della seconda includente il codominio della prima) e suriettiva su g(f(A)) (essendo questo il suo codominio).

Così si dimostrerebbe l'antisimmetria della relazione di minore od uguale numerosità se si riuscisse a trovare una biiettività da un insieme ad un suo sottinsieme che contenga un ulteriore sottinsieme biiettivo al primo insieme.

Si può riformulare così il nuovo problema.

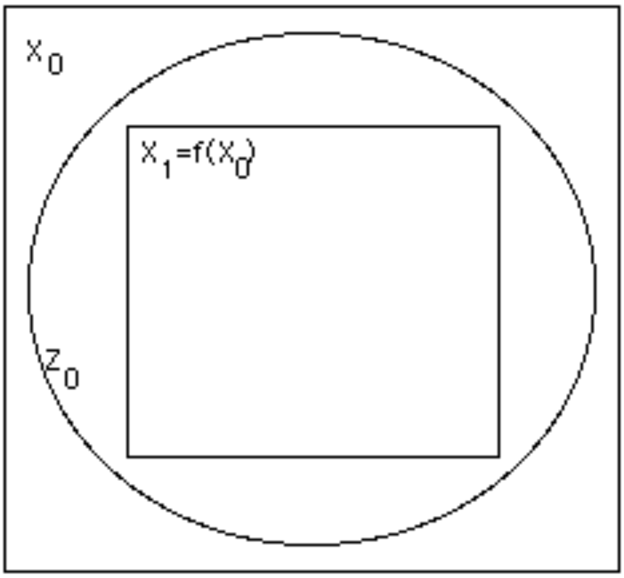
Problema. Dati un insieme X_0, una biiettività f da X_0 in un suo sottinsieme X_1 e un insieme Z_0 contenuto in X_0 e contenente X_1, trovare una biiettività da X_0 su Z_0.

UN INSIEME INFINITO Z CONTENUTO IN UN ALTRO INSIEME X E' EQUINUMEROSO A QUESTO SE CONTIENE UN SOTTINSIEME EQUINUMEROSO A X

Per dimostrare l'affermazione del titolo si deve risolvere il seguente problema.

Problema. Dati un insieme X_0, una biiettività f da X_0 in un suo sottinsieme X_1 e un insieme Z_0 contenuto in X_0 e contenente X_1, trovare una biiettività da X_0 su Z_0.

La situazione può essere raffigurata come nella seguente figura.

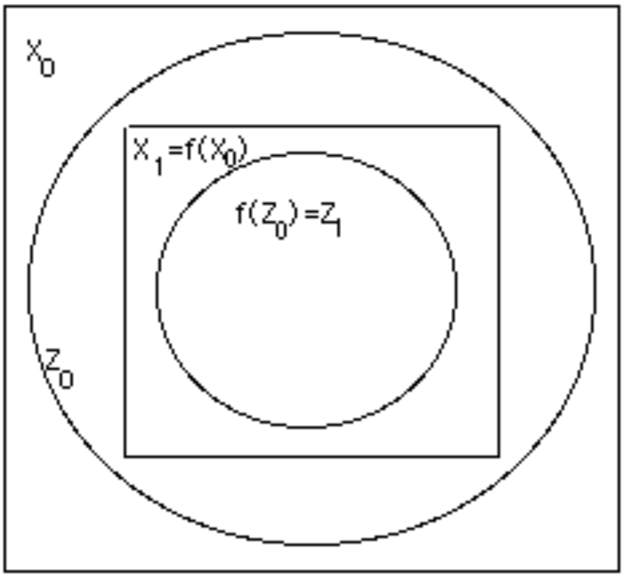


La biiettività cercata per risolvere il problema, in particolare si dovrà far corrispondere a ciascuno degli elementi di X_0-Z_0 un elemento in Z_0, e lo strumento di cui si dispone per determinare un corrispondente è la biiettività f da X_0 su X_1. La funzione $f_0 = f_{|X_0\text{-}Z_0}$ (f ristretta all'insieme X_0-Z_0, che è ciò che ora ci interessa) manda tutti gli elementi di X_0-Z_0 su f(X_0-Z_0) = (essendo f iniettiva) f(X_0)-f(Z_0).

Indicando con X_1 l'insieme f(X_0) e con Z_1 l'insieme f(Z_0), la funzione f_0 è una biiettività da X_0-Z_0 su X_1-Z_1.

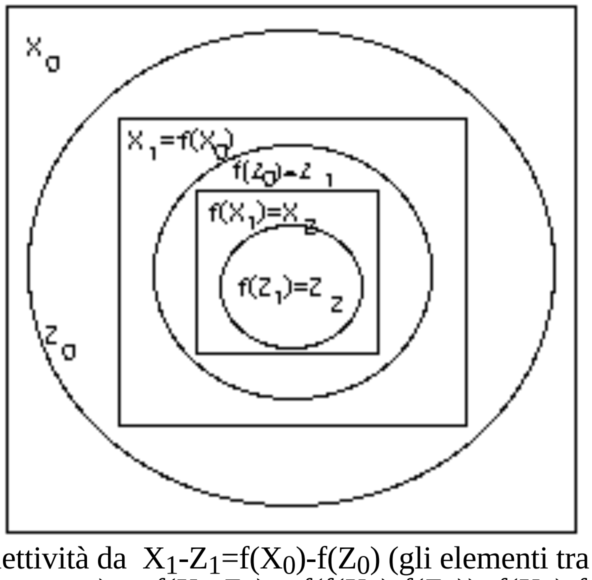
Ma ciascun elemento di Z_0-X_1 non è corrispondente di alcunché mediante la funzione f, pur dovendo essere nel codominio della biiettività cercata. L'idea è di far corrispondere, nella biiettività che si sta cercando, questi elementi a se' stessi, cioè applicare ad essi la funzione identica ristretta proprio all'insieme Z_0-f(X_0) = Z_0-X_1, si indichi questa funzione con $id_{|Z_0\text{-}X_1}$. Unendo la f_0 con la funzione $id_{|Z_0\text{-}X_1}$, si ottiene un biiettività, la si chiami g_0, da X_0-X_1 su Z_0-Z_1. Pittorescamente si può dire di aver costruito una biiettività dagli elementi rappresentati dalla zona tra i due quadrilateri agli elementi rappresentati dalla zona tra i due tondi. La situazione ora potrebbe essere raffigurata come si vede nella seguente figura.

Ora si considerino gli elementi di X_1-Z_1=f(X_0)-f(Z_0). Questi appartengono sia a X_1=f(X_0), sottinsieme di X_0 per i cui elementi non si è ancora deciso a quali farli corrispondere, ma anche all'immagine, tramite g_0, di X_0-Z_0.



Così, se g_0 deve essere un primo pezzo della biiettività che vuol risolvere il problema proposto, affinché questa sia iniettiva bisogna far corrispondere agli elementi di X_1-Z_1=f(X_0)-f(Z_0) degli elementi non ancora considerati.

Ancora lo strumento a disposizione per far ciò può essere la funzione f: così si decide, nella ricerca della biiettività, di far corrispondere a ciascun elemento t appartenete a X_1-Z_1 = f(X_0)-f(Z_0) l'elemento f(t) che apparterrà a f(X_1-Z_1) = f(f(X_0)-f(Z_0)).



Si è definita così una biiettività da X_1-Z_1=f(X_0)-f(Z_0) (gli elementi tra un quadrilatero e il tondo più grande in esso contenuto) su f(X_1-Z_1) = f(f(X_0)-f(Z_0))=f(X_1)-f(Z_1) che non è altro che la restrizione di f a X_1-Z_1. Si chiami X_2 l'insieme f(X_1), Z_2 l'insieme f(Z_1), e $f_1 = f_{|X_1\text{-}Z_1}$ questa biiezione che risulta essere da X_1-Z_1 su X_2-Z_2.

Analogamente a quanto fatto precedentemente, si sono ora saltati gli elementi di Z_1-f(X_1)= f(Z_0)-f(f(X_0)), cioè di f(Z_0-X_1), (gli elementi tra un tondo e il quadrilatero più grande in esso contenuto), e ancora si decide di far corrispondere a questi elementi essi stessi. Così la funzione identica ristretta a f(Z_0-X_1) è una biiettività da questo insieme su se' stesso.

Si può ora definire la funzione g_1 come l'unione delle funzioni f_1 e $id_{|f(Z_0-X1)}$. g_1 è una biiettività da X_1-X_2 su Z_1-Z_2. Questa è ancora una biiettività dalla zona racchiusa tra i due quadrilateri più interni sulla zona racchiusa tra i due tondi più interni.

A questo punto sembra chiaro come proseguire in modo analogo. Dopo i passi si sarà giunti a definire gli insiemi X_i (ottenuto applicando i volte la funzione f a X), Z_i (ottenuto applicando i volte la funzione f a Z) X_{i+1} e Z_{i+1} (ottenuti analogamente) tali che $X_i \supseteq Z_i \supseteq X_{i+1} \supseteq Z_{i+1}$. Si saranno anche definite le biiettività f_i da X_i-Z_i su $X_{i+1}-Z_{i+1}$ e g_i da X_i-X_{i+1} su Z_i-Z_{i+1}, la prima come restrizione della f all'insieme X_i-Z_i, l'altra unendo f_i alla funzione identica ristretta a Z_i-X_{i+1}. Ancora si potrà dire, pittorescamente, che la f_i è una biiettività dalla zona tra un quadrilatero e il tondo più grande in esso contenuto sulla zona compresa tra il prossimi quadrilatero e tondo inclusi nei primi, ed anche che g_i è una biiettività dalla zona tra due quadrilateri consecutivi sulla zona tra i due massimi tondi consecutivi contenuti nei precedenti quadrilateri rispettivamente.

Ora si possono considerare gli insiemi

$A=\cup\{X_i-Z_i: i\in \mathbb{N}\}$, $B=\cup\{Z_i-X_{i+1}: i\in \mathbb{N}\}$ e $C=\cup\{X_i-X_{i+1}: i\in \mathbb{N}\}$. A è l'unione degli insiemi a cui si è deciso di applicare la f nel cercare la biiettività, B è l'unione degli insiemi a cui si è deciso di applicare la funzione identica, e C è l'unione degli insiemi a cui si è deciso di applicare le biiettività g_i. Si osservi anche che $C=A\cup B$.

Si chiami h la funzione $\cup g_i$. Essa è una biiettività da C su $C-(X_0-Z_0)$ poiché è una unione di biiettività i cui domini sono a due a due disgiunti e i cui codomini sono a due a due disgiunti e inoltre l'unione dei loro domini è proprio C mentre l'unione dei loro codomini è $\cup\{g_i(X_i-X_{i+1}): i\in \mathbb{N}\} = \cup\{X_{i+1}-X_{i+2}): i\in \mathbb{N}\} = C-(X_0-Z_0)$.

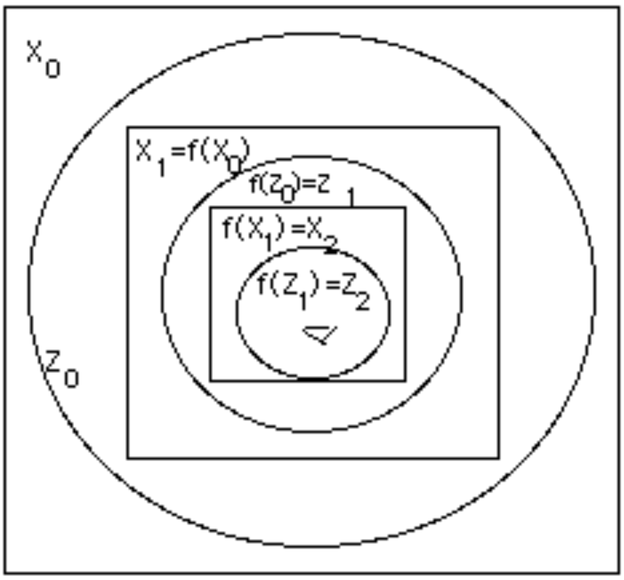
Se $C=X_0$ allora h è la biiettività cercata da X_0 su Z_0.

Se invece C è contenuto in X_0 ma è diverso da X_0, allora gli elementi di X_0-C, insieme che si può indicare con D, non sono né nel dominio C né nel codominio $C-(X_0-Z_0)$ di h (poiché $D\cap C = (X_0-C)\cap C = \emptyset$ e $D\cap(C-(X_0-Z_0)) = (X_0-C)\cap(C-(X_0-Z_0))= \emptyset$). Così per completare la biiettività cercata a partire dalla funzione h basta aggiungerle una funzione biiettiva da C a C, ad esempio l'identità su C.

Gli elementi di $D=X_0-C$ possono essere rappresentati da quelli nella zona delimitata da un triangolo nella seguente figura.

Sia h' la funzione unione delle funzione h e della funzione $id_{|X_0-C}$ (la funzione identica ristretta a X_0-C). In questo caso h' è la biiettività cercata da X_0 su Z_0.

La soluzione trovata del problema proposto permette di completare la dimostrazione che la relazione di minore od uguale tra cardinalità è antisimmetrica, sicché tale relazione (che si sa già essere una relazione riflessiva e transitiva) è una relazione d'ordine non stretto.



Ma anche se la relazione di minore od uguale tra cardinalità è una relazione d'ordine resta il dubbio se dati due qualsiasi insiemi si possa dire che la cardinalità di uno è minore od uguale alla cardinalità dell'altro, cioè se la relazione d'ordine introdotta è totale. Ma la risposta a tale dubbio viene rinviata ad altro momento perché è legata all'assioma della scelta, nel senso che si dimostra che questo assioma è equivalente all'affermazione che dati due qualsiasi insiemi sicuramente la cardinalità di uno è minore od uguale alla cardinalità dell'altro.

MOLTI INSIEMI INFINITI SONO NUMERABILI.

Per insiemi infiniti può succedere che un insieme A sia equinumeroso ad un suo sottinsieme (proprio) B e, per quanto appena visto, il sottinsieme B ha un numero minore od uguale di elementi dell'insieme A, poiché la funzione identica su B è una funzione iniettiva da B in A.

Abbiamo scelto di considerare la collezione dei numeri naturali un insieme, e di questa scelta ne abbiamo fatto un assioma, sicché ci sono insiemi infiniti, alcuni dei quali saranno equinumerosi all'insieme dei numeri naturali che diventa così un riferimento per misurare la quantità di elementi di insiemi infiniti. Chiameremo <u>numerabile</u> un insieme che ha la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri naturali.

Si indichi con N l'insieme dei numeri naturali. Si noti che la cardinalità di N è una cardinalità infinita minimale, cioè ogni insieme che abbia cardinalità strettamente minore di N deve essere finito. Infatti se A è un insieme di cardinalità strettamente minore a quella di N, deve esistere una iniettività, la si chiami f, da A in N, ma non deve esistere alcuna biiettività tra i due. Si consideri il codominio di f, esso è un sottinsieme di N. Può succedere che esista un numero naturale, lo si chiami m, tale che ogni elemento del codominio di f sia minore di m, oppure no. Nel primo caso, si può facilmente costruire una biettività g tra i numeri naturali di cod(f) e un insieme di naturali che precedono un certo naturale h che sarà minore od uguale ad m. La funzione $f^{-1}(g^{-1})$ è una biiettività dai numeri naturali che precedono h sull'insieme A, che dunque sarà finito. Nell'altro caso, si considerino i numeri di cod(f) ordinati secondo la loro grandezza in quanto numeri naturali, e si consideri la funzione g che ad ogni numero di cod(f) associa la sua posizione nell'ordinamento appena indicato: evidentemente g è una biettività da cod(f) su N, sicché la funzione $f^{-1}(g^{-1})$ è una biiettività da N in A, e A sarà equinumeroso ad N, contro l'ipotesi che la sua cardinalità fosse strettamente minore. Così l'unica possibilità rimasta è che A sia finito, come si voleva far vedere.

Da quanto appena dimostrato segue che N è la cardinalità dell'insieme N è la minima se tutte le cardinalità fossero confrontabili (totalità dell'ordine tra cardinalità), altrimenti è la minima di quelle confrontabili con la cardinalità di N.

A questo punto sorge naturale la domanda se ci sono insiemi infiniti di un'infinità diversa da quella dei numeri naturali, o, trascurando quelli non confrontabili con tale cardinalità (se ci sono), maggiore di questa.

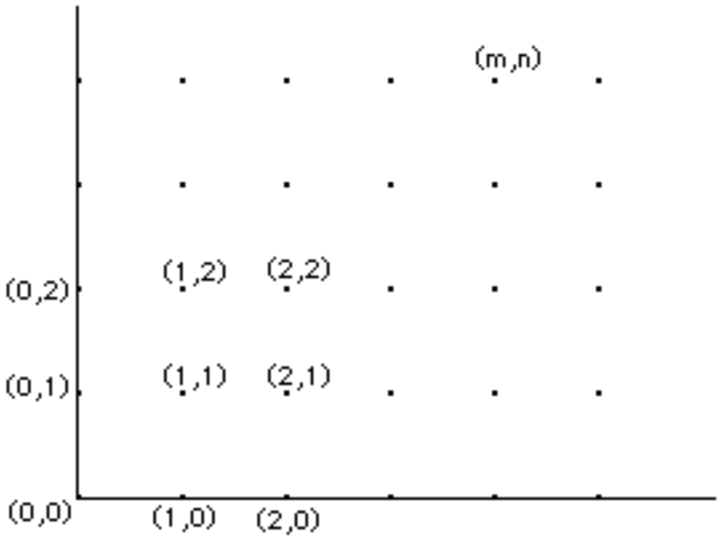
Una prima idea può essere quella di considerare un insieme infinito X di cardinalità maggiore od uguale a quella dell'insieme dei numeri naturali e di aggiungergli un elemento a porta all'insieme $X\cup\{a\}$ che è equinumeroso ad X. Infatti l'ipotesi che la cardinalità di X sia maggiore od uguale a quella dei numeri naturali, vuol dire che c'è una funione iniettiva e totale f da N in X. Ora si consideri la funzione g da $X\cup\{a\}$ in X così definita: g(a) = f(0), g(x) = f(n+1) se esiste n tale che f(n) = x, g(x) = x altrimenti. Si vede facilmente che g è una biietttività da $X\cup\{a\}$ su X, sicché questi due insiemi sono equinumerosi e non si è ottenuta una cardinalità maggiore.

Un secondo tentativo di costruire insiemi di cardinalità maggiore potrebbe essere quello di considerare la cardinalità dell'unione di due insiemi infiniti disgiunti. Anche se, come si è notato, non si è ancora definito un ente che è la cardinalità di un insieme, ma si stanno usando le dizioni insiemi della stessa cardinalità o uno di cardinalità minore od uguale ad un altro per indicare che c'è una biiettività tra i due o una funzione totale e iniettiva dal primo nel secondo, rispettivamente, tuttavia collegate a questo senso da dare alla parola cardinalità, si possono definire delle operazioni che possono ragionevolmente essere chiamate addizione e moltiplicazione di cardinalità. Mediante l'unione di insiemi disgiunti si potrebbe definire l'operazione di addizione tra cardinalità nel modo seguente. Dati due insiemi disgiunti A e B, l'uno di cardinalità |A| e l'altro di cardinalità |B|, per <u>somma delle loro cardinalità</u>, che si indica con |A|+|B|, si intende la cardinalità dell'insieme $A \cup B$. Si noti che questa operazione applicata a cardinalità di insiemi finiti dà la nota operazione di addizione tra i numeri naturali che contano la quantità degli elementi di ciascuno dei due insiemi dati. Si noti anche che questa definizione è indipendente dai particolari insiemi scelti per indicare ciascuna cardinalità. Detto altrimenti, se A' è un insieme equinumeroso ad A e B' è un insieme equinumeroso a B e A' è disgiunto da B' allora la cardinalità di $A' \cup B'$ è uguale a quella di $A \cup B$. Ciò si vede considerando la biettività tra $A \cup B$ e $A' \cup B'$ ottenuta come unione delle due biiettività una da A su A' e l'altra da B su B' (questa unione di funzioni è una funzione perché A e B sono disgiunti, mantiene l'iniettività perchè A' e B' sono disgiunti, ed è totale perchè il suo dominio è l'unione dei domini delle funzioni tra cui si è fatta l'unione).

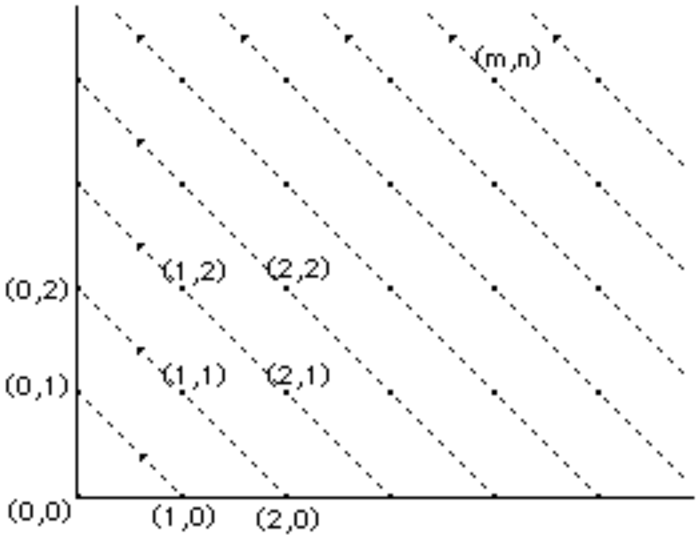
Ma l'addizione così definita, per insiemi infiniti dà risultati in un certo senso sorprendenti. Si considerino ad esempio due insiemi disgiunti numerabili, la loro unione sarà ancora numerabile. Infatti, sfruttando la biiettività tra i numeri naturali e i numeri pari, si può costruire una biiettività dal primo insieme dato sui numeri pari, analogamente si può costruire una biiettività dal secondo insieme dato sui numeri dispari, e unendo le due biiettività si ottiene una biiettività dall'unione dei due insiemi dati sui numeri naturali, giustificando così l'affermazione che anche l'unione è numerabile.

Un secondo tentativo potrebbe essere quello di considerare non due insiemi numerabili ma un numero numerabile di insiemi numerabili e disgiunti e vedere quanti elementi ci sono in totale. Poiché si considera un numero numerabile di insiemi numerabili ognuno può essere identificato con il numero naturale i che gli corrisponde e gli elementi dell'insieme numerabile che corrisponde a i possono essere messi in corrispondenza biiettiva con le coppie ordinate di numeri naturali (n,i). Così il numero totale degli elementi nei vari insiemi è in corrispondenza biiettiva con le coppie ordinate di numeri naturali, e il problema diviene come stabilire quante sono le coppie ordinate di numeri naturali, detto altrimenti, stabilire la cardinalità del prodotto cartesiano dell'insieme dei numeri naturali con se' stesso. Mediante il prodotto cartesiano di insiemi si può definire l'operazione di moltiplicazione tra cardinalità nel modo seguente. Dati due insiemi A e B, di cardinalità rispettivamente $|A|$ e $|B|$, per <u>prodotto delle loro cardinalità</u>, che si indica con $|A| \times |B|$, si intende la cardinalità dell'insieme $A \times B$. Si noti che questa operazione applicata a cardinalità di insiemi finiti dà la nota operazione di moltiplicazione tra i numeri naturali che contano la quantità degli elementi di ciascuno dei due insiemi dati. Si noti pure che questa definizione è indipendente dai particolari insiemi scelti per indicare ciascuna cardinalità. Detto altrimenti, se A' è un insieme equinumeroso ad A e B' è un insieme equinumeroso a B allora la cardinalità di $A' \times B'$ è uguale a quella di $A \times B$. Infatti, se f è una biiettività da A su A' e g una biiettività da B su B', allora la funzione $h = \{((a,b),(f(a),g(b))): (a,b) \in A \times B\}$ (h può anche essere definita così: per ogni a appartenente ad A e per ogni b appartenente a B, $h((a,b)) = (f(a),g(b))$) è una biiettività da $A \times B$ su $A' \times B'$ (lo si dimostri per esercizio).

Le coppie ordinate di numeri naturali possono essere pensate come i punti di coordinate naturali del primo quadrante di un piano cartesiano.



Una volta disposte le coppie ordinate di naturali come è illustrato nella figura, ci si accorge che si può cercare di metterle in corrispondenza biiettiva con i numeri naturali, partendo dalla coppia ordinata (0,0) e proseguendo con le coppie ordinate che hanno ugual somma delle due componenti, cominciando da quelle che hanno somma più piccola, e, a parità di somma, da quella che ha il secondo numero più piccolo. Le coppie ordinate che hanno ugual somma sono quelle disposte lungo le linee oblique raffigurate nel seguente disegno.



E' evidente che ad ogni coppia ordinata di numeri naturali corrisponde un numero d'ordine di quella coppia nell'ordinamento descritto, e che, viceversa, ogni numero naturale è il numero d'ordine, nell'ordine descritto, di una specifica coppia ordinata. Così c'è una biiettività dall'insieme delle coppie ordinate di numeri naturali sull'insieme dei numeri naturali, e i due insiemi sono equinumerosi, hanno la stessa cardinalità.

Di fatto, data la coppia ordinata di numeri naturali (m,n), non è difficile calcolare il suo posto d'ordine nell'ordinamento descritto. Sia $k=m+n$. Le coppie ordinate con somma delle componenti uguale ad h sono $h+1$, e cioè $(h,0)$, $(h-1, 1)$, $(h-2,2)$, ... ,$(1,h-1)$, $(0,h)$. Le coppie ordinate che precedono la coppia (m,n) sono quelle lungo le linee oblique con somma delle componenti della coppia minore di k, più le n coppie con somma delle componenti uguale a k ma con seconda componente minore di n. Così le coppie ordinate che precedono (m,n) saranno $(0+1)+(1+1)+...+(k-1+1)+n =1+2+...+k+n$. Per la nota formula di Gauss $1+2+...+k= k(k+1)/2$, il numero d'ordine della coppia ordinata di numeri naturali (m,n) è $n+[(m+n)\times (m+n+1)/2]$

Anche con questa operazione di prodotto non si è riusciti ad andare oltre il numerabile.

I risultati precedenti si inquadrano nella seguente situazione più generale: al solito si indichino con $|A|$ e $|B|$ le cardinalità degli insiemi A e B e si supponga che sia $|A|$ che $|B|$ siano maggiori od uguali a 2.

Sono immediate le seguenti disuguaglianze: sia $|A|$ che $|B|$ sono minori od uguali alla più grande tra le due cardinalità; questa è minore od uguale alla somma $|A|+|B|$ delle due cardinalità; questa è minore od uguale alla somma della maggiore delle due cardinalità iniziali con se' stessa; che è minore od uguale al prodotto $|A|\times|B|$ delle cardinalità (per l'ipotesi che entrambe siano maggiori od uguali a 2); e quest'ultima è minore od uguale a al prodotto della maggiore delle due cardinalità iniziali con se' stessa. Sinteticamente:

$\max\{|A|,|B|\}\leq(|A|+|B|)\leq(\max\{|A|,|B|\}+\max\{|A|,|B|\}) \leq (|A|\times|B|) \leq (\max\{|A|,|B|\}\times \max\{|A|,|B|\})$.

Se poi $\max\{|A|,|B|\}$ è una cardinalità infinità, allora $(\max\{|A|,|B|\}\times\max\{|A|,|B|\})=\max\{|A|,|B|\}$. Questo risultato è stato dimostrato nel caso di infinità numerabile, e lo vedremo anche per altre infinità (si vedrà che ce ne sono), ma può essere dimostrato per una qualsiasi infinità usando le proprietà dei buoni ordinamenti che qui non sono state ancora sviluppate, sicché lo si dimostrerà in un altro momento e per ora lo si dà per acquisito.

Mettendo assieme gli ultimi risultati, e supponendo che $\max\{|A|,|B|\}$ sia una cardinalità infinità e che $|A|\geq 2$ e $|B|\geq 2$, si ha che:

$\max\{|A|,|B|\}\leq(|A|+|B|)\leq(\max\{|A|,|B|\}+\max\{|A|,|B|\})\leq(|A|\times|B|) \leq (\max\{|A|,|B|\}\times \max\{|A|,|B|\}) = \max\{|A|,|B|\}$.

Dunque, sempre nell'ipotesi che $\max\{|A|,|B|\}$ sia una cardinalità infinità, tutte queste disuguaglianze sono in effetti uguaglianze, cioè

$\max\{|A|,|B|\}=(|A|+|B|)=(\max\{|A|,|B|\}+\max\{|A|,|B|\}) = (|A|\times|B|) = (\max\{|A|,|B|\}\times \max\{|A|,|B|\})$.

INSIEMI INFINITI NON NUMERIABILI

La somma e il prodotto di cardinalità numerabili non permettono di andar oltre il numerabile. Sicché viene naturale chiedersi se ci sono insiemi infiniti non numerabili.

Di fatto dimostriamo che la cardinalità dell'insieme dei sottinsiemi di un insieme è strettamente maggiore della cardinalità dell'insieme dato, anche se questo è infinito. Questo risultato potrà poi essere usato per far vedere che la cardinalità dell'insieme dei numeri reali è strettamente maggiore di quella dei numeri naturali, mostrando che la cardinalità dei numeri reali è uguale alla cardinalità dell'insieme dei sottinsiemi dei numeri naturali.

TEOREMA (Cantor) Non esiste alcuna biiezione da un insieme X sull'insieme dei sottinsiemi di X.

Dimostrazione.

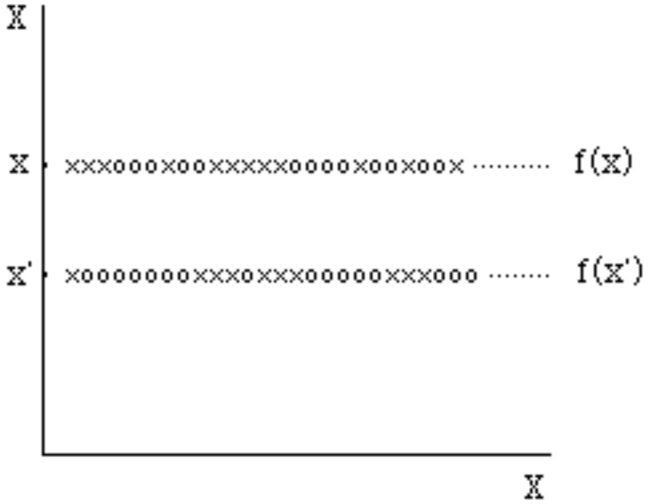
Se X è un insieme finito, diciamo con n elementi, l'insieme dei suoi sottinsiemi ha 2^n elementi e tra i due insiemi non può esserci alcuna biiettività.

Se invece X è infinito, sia f una qualsiasi funzione totale iniettiva da X in P(X), l'insieme dei sottinsiemi di X: si dimostra che f non è suriettiva. Infatti il sottinsieme S di X così definito $S=\{x: x\in X \text{ e } x\notin f(x)\}$ non è nel codominio di f. Si noti che questo insieme S dipende dalla scelta di f. Se f fosse nel codominio di f allora questo sottinsieme S corrisponderebbe ad un elemento, diciamo x_0, di X, cioè sarebbe $S=f(x_0)$. Ma S non può essere $f(x_0)$ perché S differisce da $f(x_0)$ proprio per il possedere o meno l'elemento x_0. Di fatto, per definizione di S, $x_0\in S$ se e solo se $x_0\notin f(x_0)$, e S sarà diverso da $f(x_0)$. Sicché non può essere suriettiva da X su P(X), e, data l'arbitrarietà di f, non può esistere una biiettività da X su P(X).

Con ciò la dimostrazione è conclusa, ma ci si potrebbe chiedere come mai Cantor si è inventato di scegliere proprio quell'insieme S per sviluppare la dimostrazione. Forse l'insieme S diviene una scelta naturale se si fanno le seguenti osservazioni.

Si rappresenti X come insieme di punti di una certa retta verticale. In corrispondenza di ciascun punto x di X cerchiamo di rappresentare il sottinsieme f(x) di X che la funzione totale e iniettiva f fa corrispondere a quel punto: ciò può essere fatto rappresentando come prima lo stesso insieme X, ma ora con una retta orizzontale all'altezza del punto x che si considera, ed indicando quali elementi appartengono al sottinsieme f(x) e quali no, ad esempio cerchiando quelli che non appartengono a f(x) e mettendo una croce su quelli che appartengono a f(x). Senza ripetere tutte le linee orizzontali, indichiamo l'insieme X da cui scegliere i sottinsiemi con una sola linea orizzontale, come si fa con gli assi nelle rappresentazioni del piano cartesiano, e ad ogni punto in ordinata facciamo corrispondere, alla stessa altezza, la successione di croci e tondi che rappresentano il sottinsieme corrispondente a quel punto.

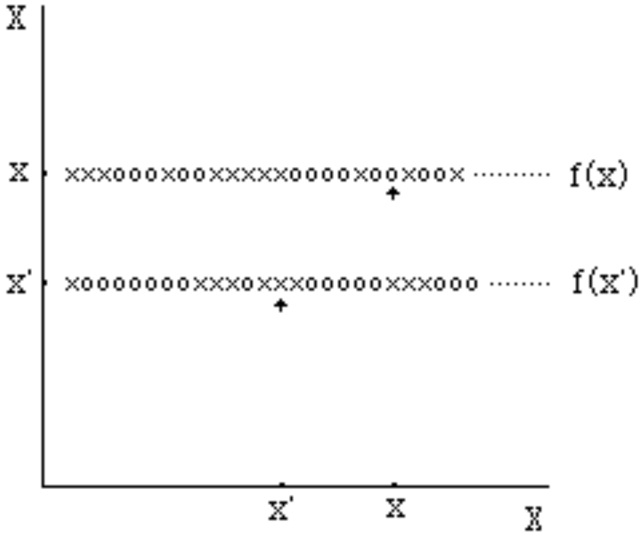
Nella seguente figura mettiamo in evidenza due elementi di X e come potrebbero essere le rappresentazioni dei sottinsiemi che corrispondono tramite la f ai due elementi.



Ora il problema è trovare un sottinsieme di X diverso da tutti i corrispondenti tramite f agli elementi di X

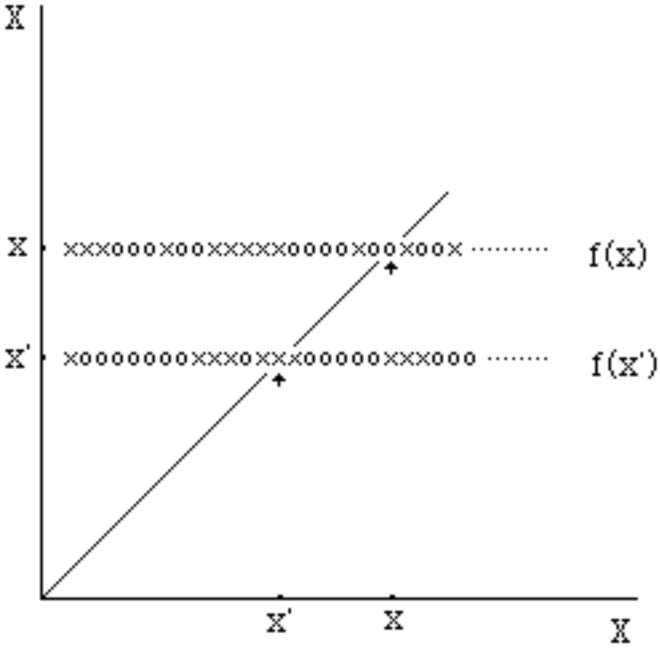
Si noti che affinché due insiemi siano diversi basta che esista un elemento che appartenga a uno e non all'altro. Così per trovare un sottinsieme di X diverso da tutti quelli che si è inteso rappresentare, cioè i corrispondenti agli elementi di X mediante la f, basta che sia diverso da uno di quei sottinsiemi rispetto ad un elemento, e diverso da un altro rispetto ad un altro elemento. Per costruire un sottinsieme S di X diverso da ciascuno di quelli nel codominio di f bisogna scegliere, per ciascuno di questi f(x) con $x \in X$, un elemento che differenzi S da f(x), cioè dal sottinsieme corrispondente a x tramite f.

Un elemento caratteristico per ciascuno di questi f(x) è proprio x, che è diverso da sottinsieme a sottinsieme nel codominio di X, esso è l'elemento che individua il sottinsieme.



Ecco allora la scelta di differenziare il sottinsieme S da ciascuno dei sottinsiemi f(x) nel codominio di X proprio mediante l'elemento x di X che individua il sottinsieme f(x). Ciò si può realizzare proprio mettendo in S l'elemento x se e solo se non appartiene al sottinsieme f(x) individuato da x. Così sarà $S=\{x: x \in X \text{ e } x \notin f(x)\}$.

Si noti la peculiarità di questo metodo, per cui viene chiamato metodo diagonale: per vedere come comportarsi sull'elemento x si va a vedere cosa avviene lungo la diagonale (la bisettrice del quadrante) nel disegno riportato. Si noti anche quanto si è vicini ad un auto riferimento.



Si noti ancora come la definizione dell'insieme S dipende strettamente dalla funzione f, e quindi S è un insieme che può essere costruito solo avendo già precisato i sottinsiemi di X corrispondenti agli elementi di X tramite f. In qualche modo bisogna già conoscere i sottinsiemi di X (essi servono per definire f) per poter sapere chi è uno di essi: S. Questo fenomeno è noto come impredicatività dell'insieme dei sottinsiemi, che, pur essendo vicino ad entrare in contrasto con l'assioma di fondazione introdotto per gli insiemi, non lo contraddice, ma piuttosto provoca una forte imprecisione in cosa si debba intendere per insieme dei sottinsiemi.

QUALCHE CASO CURIOSO DI ARITMETICA INFINITA.

Abbiamo già visto che la cardinalità dell'insieme dei naturali è uguale a quella del prodotto cartesiano dell'insieme dei naturali con se stesso. Ora vogliamo estendere questo risultato a molti altri casi. Allo scopo ci serviranno dei risultati preliminari.

TEOREMA. Dati due insiemi infiniti A e B, se sono equinumerosi, allora sono tra loro equinumerosi anche l'insiemi dei sottinsiemi di A e l'insieme dei sottinsiemi di B. Con la notazione introdotta, se $|A| = |B|$ allora $|P(A)| = |P(B)|$.

Dimostrazione. Sia f una biiettività tra A e B (esiste per l'ipotesi di equinumerosità dei due insiemi A e B). Si consideri la seguente funzione g da P(A) a P(B): g associa ad ogni sottinsieme X di A il seguente insieme $Y = \{f(x): x\in X\}$. Chiaramente g è totale. g é anche iniettiva. Infatti, se X e X' sono sottinsiemi di A tra loro diversi, allora c'è un elemento di A, lo si chiami a, tale che appartiene all'uno e non all'altro degli insiemi X e X' (si supponga che $a\in X$ e $a\notin X'$). Per definizione di g, $f(a)\in g(X)$ e, poiché f è biiettiva, f(a) è diversa da f(x) per ogni $x\in X'$, sicché $f(a)\notin g(X')$ e $g(X)\neq g(X')$. Inoltre g è suriettiva poiché se Z è un qualsiasi sottinsieme di B si può considerare l'insieme $V = \{f^{-1}(y): y\in Z\}$, dal momento che f è biiettiva e dunque anche iniettiva. Evidentemente $g(V) = Z$, e, per l'arbitrarietà di Z, g è suriettiva. Avendo esibito una biiettività tra P(A) e P(B) si può dire che questi due insiemi sono equinumerosi.

Altra affermazione, utile per i risultati ai quali si sta cercando di pervenire, è quella espressa dal seguente

TEOREMA. La cardinalità del prodotto cartesiano dell'insieme dei sottinsiemi di un insieme infinito X è minore od uguale alla cardinalità del prodotto cartesiano dell'insieme dei sottinsiemi di $(X\cup\{c\})$ con se stesso, dove c è un elemento che non appartiene a X. In simboli $|P(X)\times P(X)| \leq |P((X\cup\{c\})\times(X\cup\{c\}))|$.

<u>Dimostrazione.</u> Il teorema chiede di mostrare che c'è una iniettività totale da $P(X)\times P(X)$ a $P((X\cup\{c\})\times(X\cup\{c\}))$. Un elemento di $P(X)\times P(X)$ è una coppia ordinata (A,B) con A e B sottinsiemi di X. Se A e B sono non vuoti, si consideri la funzione h che ad (A,B) associa $A\times B$ che è un sottinsieme di $X\times X$ e dunque anche un sotinsieme di $(X\cup\{c\})\times(X\cup\{c\})$. Questa funzione è iniettiva poiché, se (A,B) è una coppia ordinata diversa dalla coppia ordinata (A',B') di sottinsiemi di X, allora o A è diverso da A' o B è diverso da B'. Comunque ci sarà un elemento, sia a, che o appartiene all'uno e non all'altro tra A e A' oppure appartiene all'uno e non all'altro tra B e B'. Si supponga che $a\in A$ e $a\notin A'$, gli altri casi essendo analoghi. Allora, se b è un elemento di B (si stanno considerando solo sottinsiemi di X non vuoti), la coppia ordinata (a,b) appartiene ad $A\times B$, che è h((A,B)), ma non ad $A'\times B'$, che è h((A',B')), sicché $h((A,B)) \neq h((A',B'))$ e h è iniettiva, come volevasi far vedere. Nel caso invece che A sia vuoto e B no, si consideri la funzione $h' = \{((\varnothing,B),\{c\}\times B): B\subset X\}$. Se invece B è vuoto e A no, si consideri la funzione $h'' = \{((A,\varnothing),A\times\{c\}): A\subset X\}$. Se infine sia A che B sono vuoti, si considerei la funzione $h''' = \{((\varnothing,\varnothing),(c,c))\}$. E' immediato che h, h', h'' e h''' sono iniettive e hanno domini e codomini rispettivamente a due a due disgiunti e disgiunti, sicché l'unione delle funzioni h, h', h'', h''' è una funzione che è totale e iniettiva. Ciò conclude la dimostrazione del teorema.

Poiché se X è infinito $|X| = |X\cup\{c\}|$, ed anche $|X\times X| = |(X\cup\{c\})\times(X\cup\{c\})|$ (come si dimostra facilmente), dall'ultimo teorema visto segue che $|P(X)\times P(X)| \leq |P(X\times X)|$. Sfruttando anche il primo teorema, e il fatto già dimostrato che $|N| = |N\times N|$ (dove N indica l'insieme dei numeri naturali), si ha che $|P(N)| \leq$ (poiché $2 < |P(N)|$) $|P(N)\times P(N)| \leq$ (per l'osservazione precedente) $|P(N\times N)| \leq$ (per il primo teorema mostrato) $|P(N)|$. Dall'antisimmetria della relazione d'ordine, segue che $|P(N)\times P(N)| = |P(N)|$. Infine, ricordando che $|P(N)| = |R|$ (dove R indica l'insieme dei numeri reali), si ottiene che $|R\times R| = |R|$, relazione che può anche essere letta dicendo che i punti di un piano sono tanti quanti quelli di una retta, se ai primi corrispondono le coppie di numeri reali e ai secondi i numeri reali.

Altra conseguenza conseguibile dai risultati visti è la determinazione della quantità delle funzioni dai numeri naturali nei numeri naturali.

Anzitutto si considerino l'insieme F delle funzioni totali dall'insieme dei numeri naturali nell'insieme dei numeri 0 e 1. Esse sono tante quante i sottinsiemi di N, perché la corrispondenza ϕ che ad ogni tale funzione f associa il sottinsieme S_f dei naturali che costituiscono la controimmagine di 0 attraverso la f, $S_f = f^{-1}(0)$, cioè la funzione ϕ tale che $\phi(f) = S_f$, e la corrispondenza ψ che ad ogni sottinsieme V di N associa la funzione totale f_V dall'insieme dei naturali in {0,1} tale che $f_V(n)=0$ se $n\in V$ e $f_V(n) = 1$ se $n\notin V$ (f_V è detta la funzione caratteristica dell'insieme V), cioè la funzione ψ tale che $\psi(V) = f_V$, sono una inversa dell'altra (dal momento che, per ogni $V\subset N$, $\phi(\psi(V) = V$ e che, per ogni $f\in F$, $\psi(\phi(f)) = f$) e pertanto entrambe biiettività tra l'insieme delle funzioni totali da N in {0,1} e l'insieme dei sottinsiemi di N, che così hanno la stessa cardinalità.

Osserviamo ora che le funzioni totali da N in {0,1} sono alcune delle funzioni da N in N, e che queste sono alcune delle relazioni binarie da N in N. Come si sa, una relazione binaria da N in N è un sottinsieme di $N\times N$, sicché l'insieme della relazioni binarie ha cardinalità uguale a $|P(N\times N)|$. Quanto osservato può essere ridetto così: $|P(N)| = |F| \leq |\{f\text{: f è funzione da N in N}\}| \leq |\{r\text{: r è una relazione binaria su N}\}| = |P(N\times N)| = |P(N)|$, con l'ultima uguaglianza giustificata dai risultati appena raggiunti. Grazie alla antisimmetria dell'ordine tra cardinalità si può concludere che la cardinalità dell'insieme delle funzioni da N in N è uguale alla cardinalità dell'insieme dei sottinsiemi di N.

Sfruttando quanto fin qui ottenuto, e argomentando in maniera analoga, si perviene anche ai seguenti risultati:

$|P(P(N))\times P(P(N))| = |P(P(N))|$, $|P(P(P(N)))\times P(P(P(N)))| = |P(P(P(N)))|$, ...

(le dimostrazioni al lettore, per esercizio).

Già precedentemente si era osservato che la somma e il prodottodi cardinalità infinite sono la più grande delle cardinalità su cui si è operato. Ciò era stato ottenuto come consegnenza del fatto che se $\max\{|A|,|B|\}$ è una cardinalità infinità, allora $(\max\{|A|,|B|\}\times\max\{|A|,|B|\})$ =

max{|A|,|B|}; ma si era anche osservato che questa implicazione, dimostrata se max{|A|,|B|} = |N|, avrebbe richiesto una delicata dimostrazione nel caso generale. Ora non si è raggiunta una tale dimostrazione, ma si è dimostrata la correttezza dell'affermazione in molti altri casi; sicché si sono estese anche a questi casi le proprietà dell'addizione e della moltiplicazione tra cardinalità infinite.

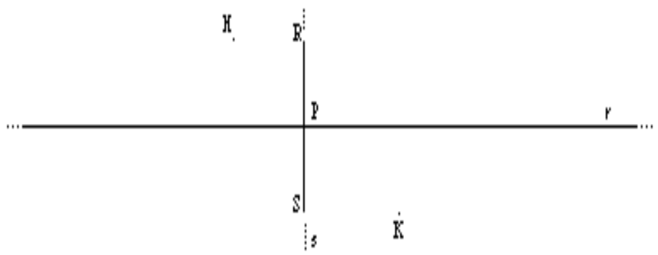
LA CARDINALITA' DELL'INSIEME DEI NUMERI REALI.

Con il teorema di Cantor a disposizione, si può affrontare il problema di determinare la quantità dei numeri reali.

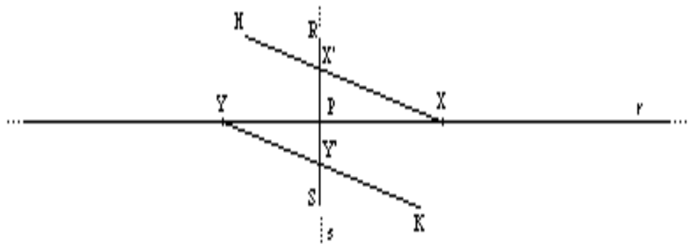
Si dimostrerà che essi sono tanti quanti i sottinsiemi dei numeri naturali attraverso vari passaggi. Anzitutto ai numeri reali si associeranno i punti di una retta mediante il noto metodo delle coordinate, e questa corrispondenza è una biiettività in base alle nozioni di retta e di numeri reali a cui si fa riferimento. Poi si mostrerà che i punti di una retta sono tanti quanti i punti di un segmento aperto, ad esempio del segmento (0,1). Si tornerà quindi, sempre grazie al metodo delle coordinate, all'insieme $\{x: x\in \mathbb{R} \text{ e } 0<x<1\}$ di numeri reali, e si considereranno le rappresentazioni in notazione binaria infinita di questi numeri studiando il rapporto che c'è tra i numeri reali maggiori di 0 e minori di 1 e le loro notazioni binarie infinite (Si noti che una qualsiasi notazione binaria finita può essere considerata infinita completandola con simboli sempre 0 e la nuova successione rappresenta lo stesso numero di quella finita). Le notazioni binarie infinite dei numeri reali maggiori di 0 e minori di 1 da dopo la virgola sono successioni infinite di simboli che sono o il simbolo 0 o il simbolo 1, e quindi sono tante quante queste successioni. Infine si dimostrerà che queste successioni sono tante quante i sottinsiemi dei numeri naturali. I vari passi sopra esposti non ancora giustificati verranno presentati indipendentemente, ma non esattamente nello stesso ordine indicato, per mettere in risalto i punti dove possono esserci delle maggiori difficoltà.

TEOREMA A. I punti della retta sono tanti quanti i punti di un segmento tra due punti diversi esclusi gli estremi (in particolare del segmento che va dal punto di coordinata 0 escluso al punto di coordinata 1 escluso).

Dimostrazione. Sia data una retta r e su di essa si fissi un punto P. Si posizioni il segmento RS, estremi esclusi, considerato perpendicolarmente alla retta intersecandola nel punto P e in modo che P sia anche il punto medio dell'intervallo. Si considerino poi i due punti H e K uno sulla parallela alla retta r per il punto R e l'altro sulla retta parallela sempre alla retta r ma per il punto S in modo che siano da parti diverse della retta s che contiene il segmento RS.



Ora si consideri la funzione φ che ad ogni punto X della retta r che sta nel semipiano determinato dalla retta s che contiene K associa il punto X' del segmento PR intersezione di questo segmento con la retta per i punti H e X, e che ad ogni punto Y della retta r che sta nel semipiano determinato dalla retta s che contiene H associa il punto Y' del segmento PS intersezione di questo segmento con la retta per i punti K e Y, e che a P associa P stesso.



La funzione φ così definita è una biiettività dalla retta r sul segmento RS. (Lo si dimostri per esercizio).

TEOREMA B. Le successioni infinite di simboli 0 e 1 sono tante quanti i sottinsiemi dei numeri naturali.

Per successione infinita si intende un insieme totalmente ordinato le cui posizioni nell'ordine sono in una biiettività che preserva l'ordine con i numeri naturali. Si dice che una biiettività f da un insieme ordinato in un altro preserva l'ordine se ad un elemento, a, più grande (nell'ordine del primo insieme) di un altro, b, fa corrispondere un elemento, f(a), più grande (nell'ordine del secondo insieme) del corrispondente, f(b), dell'altro elemento, b.

Dimostrazione.

Data una qualsiasi successione infinita s= $(h_0,h_1,...,h_i,...)$ di simboli 0 e 1 (cioè ogni h_i è o 0 o 1) le si associ il seguente sottinsieme di naturali $X_s=\{n: h_n=0\}$ cioè l'insieme di tutte le posizioni in cui nella successione infinita s c'è uno 0. Questo modo di associare sottinsiemi dei naturali alle successioni infinite di 0 e 1 è una funzione ψ biiettiva dall'insieme delle successioni infinite di 0 e 1 all'insieme dei sottinsiemi dei naturali. Infatti 1) è totale perché per ogni successione infinita c'è un unico sottinsieme dei naturali associatole; 2) è iniettiva perché se s e s' sono successioni infinite diverse (in almeno una posizione i in una c'è 0 e nell'altra c'è 1) allora i corrispondenti insieme X_s e $X_{s'}$ sono diversi (il numero i appartiene a uno e non all'altro); e 3) è suriettiva perché dato un qualsiasi sottinsieme A dei naturali la successione infinita s* così definita:

nella i-esima posizione di s* (in h_i) c'è 0 (h_i=0) se e solo se il numero i appartiene ad A ($i\in A$)

è tale che il sottinsieme dei naturali che le è associato è proprio A.

Data la biiettività della funzione ψ, l'insieme delle successioni infinite di simboli 0 o 1 e quello dei sottinsiemi dei numeri naturali sono equinumerosi.

A questo punto si vogliono confrontare l'insieme dei numeri reali maggiori di 0 e minori di 1 con l'insieme delle loro rappresentazioni in notazione binaria infinita.

La difficoltà sta nel fatto che ci sono numeri reali che hanno più rappresentazioni in notazione binaria infinita.

Di fatto due rappresentazioni che abbiano le stesse cifre binarie (o 0 o 1) fino ad una certa posizione i e poi una prosegue con un 1 seguito da tutti 0 (è del tipo $0,h_0...h_i1000...$) mentre l'altra prosegue con uno 0 seguito da tutti 1 (è del tipo $0,h_0...h_i0111...$) rappresentano lo stesso numero. Infatti, se si indica con r_1 il numero rappresentato dalla prima notazione e con r_2 il numero rappresentato dalla seconda notazione ($r_1=0,h_0...h_i1000...$ e $r_2=0,h_0...h_i0111...$), troncando la notazione di r_1 alla j-esima cifra dopo la virgola, per un qualsiasi numero naturale j tale che da li in poi nella notazione di r_1 ci sono tutti 0, si ottiene una notazione dello stesso numero r_1, mentre troncando la notazione di r_2 alla j-esima cifra dopo la virgola si ottiene una approssimazione per difetto di r_2 a meno di $1/2^j$, sicché la differenza r_1-r_2 può essere approssimata per eccesso a meno di $1/2^j$ dalla differenza delle due successioni finite di cifre 0 o 1, e questa differenza è esattamente $1/2^j$. Così $r_1\geq r_2$ e, essendo la differenza r_1-r_2 tra i due numeri sia maggiore o uguale a zero che minore di ogni numero del tipo $1/2^j$ per qualunque numero naturale j, i due numeri saranno uguali, $r_1=r_2$, dal momento che l'unico numero reale maggiore o uguale a zero e minore di ogni numero razionale è zero.

Così si è visto che i numeri reali maggiori di zero e minori di uno che ammettono una rappresentazione in notazione binaria finita ammettono due rappresentazioni in notazione binaria infinita. Si vede facilmente che non ci sono altre notazioni per rappresentare questi numeri perché le differenze non sarebbero nulle, e, per questo stesso motivo, anche i numeri reali maggiori di zero e minori di uno che non ammettono rappresentazioni in notazione binaria finita hanno un'unica notazione binaria infinita che li rappresenti.

In tal modo, associando ai numeri reali rappresentabili con due notazioni binarie infinite solo quella le cui cifre sono sempre 0 da un certo punto in poi, si ottiene una corrispondenza biiettiva tra tutti i reali e le successioni infinite di 0 o 1 che non siano sempre 1 da un certo punto in poi. Pertanto l'insieme delle successioni infinite di 0 o 1 è equinumeroso all'insieme dei numeri reali unito all'insieme delle successioni infinite di 0 o 1 che sono sempre 1 da un certo punto in poi.

Si è così pervenuti ad affermare che la cardinalità dell'insieme S_{inf} delle successioni infinite di 0 o 1 è uguale alla somma delle cardinalità dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali più la cardinalità dell'insieme S_1 delle successioni infinite di 0 o 1 che è sempre 1 da un certo punto in poi. Sappiamo già che la cardinalità di S_{inf} è uguale alla cardinalità dell'insieme dei sottinsiemi dei numeri naturali, e, per calcolare la cardinalità dell'insieme $\mathbb{R}$ dei reali (che si sta cercando), serve conoscere la cardinalità dell'insieme S_1 delle successioni infinite di 0 o 1 che sono sempre 1 da un certo punto in poi.

Per calcolare la cardinalità dell'insieme S_1 si osservi anzitutto che le successioni infinite di 0 o 1 che sono sempre 1 da un certo punto in poi sono tante quante le successioni finite di 0 o 1 ottenute dalle prime troncandole dove iniziano ad essere sempre 1, e così si ottengono tutte le successioni finite di 0 o 1. Sicché per calcolare la cardinalità di S_1 ci si è ricondotti a calcolare la cardinalità dell'insieme S_f delle successioni finite di 0 o 1. Queste si possono dividere negli insiemi $S_{f,i}$ tra loro a due a due disgiunti delle successioni finite di 0 o 1 di lunghezza i, per ogni numero naturale i. Evidentemente ogni singolo insieme $S_{f,i}$ è finito, e questi insiemi sono tanti quanti i numeri naturali, sicché la cardinalità della loro unione sarà minore od uguale alla cardinalità di una unione di un numero numerabile di insiemi numerabili a due a due disgiunti, e si sa già che questa cardinalità è il prodotto della cardinalità di $\mathbb{N}$ per $\mathbb{N}$, che è ancora la cardinalità di $\mathbb{N}$. Concludendo questo calcolo si può dire che la cardinalità dell'insieme S_1 delle successioni infinite di 0 o 1 che sono sempre 1 da un certo punto in poi è uguale alla cardinalità dell'insieme dei numeri naturali.

Così si è pervenuti alla seguente situazione: la cardinalità dell'insieme dei sottinsiemi dei naturali è uguale (alla cardinalità dell'insieme S_{inf} delle successioni infinite di 0 o 1, che è uguale alla somma delle cardinalità dell'insieme dei numeri reali più la cardinalità dell'insieme delle successioni infinite di 0 o 1 che sono sempre 1 da un certo punto in poi, che è uguale) alla somma delle cardinalità dell'insieme dei numeri reali e dell'insieme dei numeri naturali, cioè

$$|P(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| + |\mathbb{N}|.$$

Poiché si sa che la somma di due cardinalità è uguale alla cardinalità massima delle due, si ha che $|P(\mathbb{N})| = \max(|\mathbb{R}|, |\mathbb{N}|)$; e poiché $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$, dovrà essere $\max(|\mathbb{R}|,|\mathbb{N}|) = |\mathbb{R}|$, cioè $|P(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$, che è ciò che si voleva dimostrare.

IL PARADISO DI CANTOR

Una ulteriore e diversa applicazione del teorema di Cantor porta alla costruzione del cosiddetto "paradiso di Cantor". Questa espressione vuole indicare l'esistenza di una successione, addirittura transfinita, di cardinalità infinite ciascuna strettamente maggiore della precedente. Allo scopo basta iterare il passaggio all'insieme dei sottinsiemi , ad esempio a partire dall'insieme dei numeri naturali, per ottenere una successione di insiemi la cui cardinalità, per il teorema di Cantor, continua a crescere strettamente:

$$|\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})| < |P(P(\mathbb{N}))| < |P(P(P(\mathbb{N})))| < \ldots < |P(\ldots P(P(P(P(\mathbb{N}))))\ldots)| < \ldots$$

Così l'immagine che ci si può fare degli insiemi infiniti diventa molto articolata poiché le loro cardinalità possono essere una delle tante cardinalità possibili esemplificate nella successione, o altre ancora dal momento che non è detto che tutte le cardinalità si esauriscano tra quelle indicate nella precedente lista. Ora ci si vuole domandare: quanto va avanti l'elenco presentato? Anche se per ora non si può arrivare ad una risposta precisa, poiché questa richiederebbe l'introduzione dei numeri ordinali, si può osservare che ci sono cardinalità strettamente maggiori di ciascuna delle cardinalità della successione prima indicata.

Si indichi con $P^i(\mathbb{N})$ l'iterazione per i volte del passaggio all'insieme dei sottinsiemi a partire dall'insieme $\mathbb{N}$ (così, ad esempio, $P^2(\mathbb{N})$ è $P(P(\mathbb{N}))$). Si consideri l'insieme

$$\cup\{P^i(\mathbb{N}): i\in \mathbb{N}\}.$$

Si dimostra che, per ogni numero naturale i, la cardinalità dell'insieme $P^i(\mathbb{N})$ è strettamente minore della cardinalità dell'insieme $\cup\{P^i(\mathbb{N}): i\in \mathbb{N}\}$, $|P^i(\mathbb{N})| < |\cup\{P^i(\mathbb{N}): i\in \mathbb{N}\}|$.

Ciò segue dal più generale

TEOREMA. Se per ogni numero naturale i, X_i è un insieme infinito tale che $|X_i| < |X_{i+1}|$, allora l'unione di questi insiemi, $\cup\{X_i$: i è un numero naturale$\}$, ha cardinalità strettamente maggiore della cardinalità di ciascun X_i. Inoltre la cardinalità di $\cup\{X_i$: i è un numero naturale$\}$ è la minima maggiore di tutte le cardinalità degli X_i.

Dimostrazione. Per comodità di scrittura, si indichi con Y l'insieme $\cup\{X_i: i\in \mathbb{N}\}$. Poiché X_i è contenuto in Y, la funzione identica su X_i è una funzione totale e iniettiva da X_i in Y, sicché $|X_i| \leq |Y|$. Per completare la dimostrazione bisogna mostrare che $|X_i| \neq |Y|$. Ciò segue dal fatto che, per lo stesso motivo, anche $|X_{i+1}|\leq|Y|$, e che $|X_i| < |X_{i+1}|$, così $|X_i| < |X_{i+1}| \leq |Y|$ e $|X_i| <|Y|$.

Per mostrare l'ultima affermazione, si supponga per assurdo che ci sia un insieme Z di cardinalità minore di $|Y|$ e maggiore di $|X_i|$ per ogni numero naturale i. Allora esisterebbero biiettività f_i da ciascun insieme X_i in corrispondenti sottinsiemi Z_i di Z. Non è restrittivo supporre che gli insiemi Z_i siano a due a due disgiunti: infatti per induzione sull'indice degli insiemi, ottenuti i primi k, la loro unione ha per cardinalità la massima delle cardinalità degli insiemi considerati (per i risultati visti prima), cioè $|X_k|$, che è minore di $|Z|$, sicché $|Z-\cup\{Zj: j\leq k\}| = |Z|$ (sempre per i risultati visti prima) e si può prendere $Z_{k+1} \subset (Z-\cup\{Zj: j\leq k\})$, cioè disgiunto dai precedenti. Così $|Y|=|\cup\{X_i: i\in \mathbb{N}\}|\leq|\cup\{Zj: i\in \mathbb{N}\}|\leq|Z|<|Y|$, assurdo. Pertanto non può esistere un insieme Z con tale cardinalità.

Si noti che, se X_i è $P^i(\mathbb{N})$, allora Y è $\cup\{P^i(\mathbb{N}): i\in \mathbb{N}\}$ e il caso particolare considerato rientra proprio nella generalità del teorema dimostrato.

Si noti ancora che l'insieme Y ottenuto può diventare il punto di partenza per una ulteriore successione di insiemi di cardinalità sempre strettamente maggiore, e precisamente gli insiemi $P^i(Y)$, e che l'unione di questi è un insieme di cardinalità ancora maggiore. E il gioco può continuare.

Oltre agli interrogativi sul prolungarsi della successione delle cardinalità infinite sempre maggiori, è del tutto naturale l'interrogativo se tra $\mathbb{N}$ e $P(\mathbb{N})$ c'è o meno una cardinalità strettamente compresa tra le due. Più in generale, ci si può chiedere se, dato X un insieme infinito, esiste un insieme Y tale che $|X| < |Y| < |P(X)|$.

Cantor ipotizzò che non ci siano insiemi Z tali che $|\mathbb{N}| < |Z| < |P(\mathbb{N})|$, e questa ipotesi ha preso il nome di ipotesi del continuo. Ancora, per discutere più facilmente questa ipotesi e la sua generalizzazione, è opportuno poter disporre dei numeri ordinali, ma questi saranno considerati più avanti, e si rinvia ad allora un approfondimento del tema indicato.