Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Matematica di Base — 23 giugno 2008

matricola .... nome .... cognome ....

Corso di Laurea in | Informatica | Informatica Mult. | Matematica Appl. |

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Tot

1) Si consideri la seguente relazione sull'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi

$$R = \{\,(a,b) \mid a,b \in \mathbf{Z},\ a-5b \text{ è multiplo di } 4\,\}.$$

Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza. È vero che $[1]_R = [15]_R$? È vero che $[10]_R = [2]_R$? Quante sono le classi d'equivalenza individuate da R?

2) Mostrare che $R = \{(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(a,g),(b,c),(b,e),(b,d),(b,f),(b,g),(c,g),(d,e),(d,f),(d,g),(e,f),(e,g)\}$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{a,b,c,d,e,f,g\}$. Determinare gli elementi massimali, minimali, eventuali massimo, minimo, maggioranti, minoranti, estremo superiore e estremo inferiore del sottoinsieme $\{b,c,d,e\}$.

3) Dimostrare per induzione che, per $n \geq 2$, $5^n \geq 4^n + 2^n$.

4) Si risponda alle seguenti domande, motivando le risposte:

(1) Quando due insiemi hanno la stessa cardinalità?

(2) L'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali e l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali hanno la stessa cardinalità? Perché?

(3) L'insieme Π dei numeri reali irrazionali è numerabile? Perché?

(4) Gli insiemi $\{x \mid x \in \mathbf{R},\ 0 < x < \sqrt{3}\}$ e $\{x \mid x \in \mathbf{R},\ 0 < x < 4\}$ hanno la stessa cardinalità? Perché?

7) Sia $\mathfrak{N}$ la struttura dei numeri naturali e $\mathfrak{R}$ quella dei numeri reali, con le usuali relazioni e funzioni e l'usuale linguaggio.

(1) Il seguente enunciato

$$\forall v_0 \rightarrow < v_0 0 \exists v_1 \wedge < 0 v_1 = v_0 \times \times v_1 v_1 v_1$$

è vero o falso in $\mathfrak{N}$? E in $\mathfrak{R}$? Motivare le risposte.

(2) Si consideri la formula $\varphi : \neg\exists v_2 \wedge < v_0 v_2 < v_2 v_1$ e la realizzazione $\sigma = (\mathfrak{N}, \underline{a})$, dove $\underline{a} : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, $n \rightarrow n+2$. Si calcoli esplicitamente (passaggio per passaggio) φ^σ.

6) Dire che cosa significa che una formula α è soddisfacibile. Dire cosa significa che la formula α è conseguenza logica dell'insieme di formule $\{\beta,\gamma\}$. Dimostrare che, per ogni scelta delle formule α e β,

$$\{\alpha \vee \beta\} \models \rightarrow \neg\alpha\beta$$

7) Si consideri la struttura $\mathfrak{N} = (\mathbf{N}, \{\equiv, \prec\}, \{\oplus, \otimes\}, \{\mathit{0}, \mathit{1}\})$, dove $\mathbf{N}$ denota l'insieme dei numeri naturali, $\equiv$ la relazione binaria di essere lo stesso numero, $\prec$, $\oplus$ e $\otimes$ rispettivamente l'ordine, l'addizione e la moltiplicazione tra numeri naturali, $\mathit{0}$ e $\mathit{1}$ i numeri zero e uno.

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio adatto alla struttura i cui simboli propri siano i predicati $=$, $<$; i simboli per funzione $+$, $\times$ e s; i simboli per costante $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$.

Nel linguaggio $\mathcal{L}$ si scriva una formula $\varphi(v_0, v_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(v_0, v_1)[a, b]$ se e solo se $a - b$ è un numero pari non divisibile per 5.

8) Per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, sia $f_\lambda \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da:

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} -e^{-x} & x \leq 0 \\ \lambda x^2 - 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Per quali valori di λ f_λ è una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$? Per quali valori di λ f_λ è una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ f_λ totale, iniettiva, suriettiva? Esiste l'inversa di f_λ? In caso affermativo, trovare f_λ^{-1}.

9) Siano $f, g \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite da

$$f(x) = \sqrt{\ln x + 1} \qquad g(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

(1) Trovare l'insieme di definizione di f e l'insieme di definizione di g.
(2) Determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$, specificandone gli insiemi di definizione.