

# Logica Computazionale - 2007-8

## esercizio 3

October 17, 2007

Leggere le dispense di logica modale fino a pag. 29.

Il sistema modale **S4** è il sistema **K4** con l'aggiunta della seguente regola  $\Box$ -L:

$$\frac{A, \Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

(vedi dispense pag. 33-41). Verifica che le formula seguenti sono valide in **S4**:

- (a)  $\Box(\Box A \rightarrow \Box \neg \Box B), \Box B \Rightarrow \Box \neg \Box A$
- (b)  $\Box(\Box \neg \Box B \rightarrow \Box \neg \Box A), \Box A \Rightarrow \Box \Diamond \Box B$
- (c)  $\Box((\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box C), \Box A, \Box B \Rightarrow \Box C$
- (d)  $\Box(\Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow \Box C)), \Box A \wedge \Box B \Rightarrow \Box C$

*Suggerimento:* applica la procedura *semantic tableaux* per **K4** semplificando formule modali nell'antecedente secondo la regola  $\Box$ -L.

**Esercizio 2.** Leggere le pagine 13-18 (Normal Proofs escluso) delle dispense di teoria della dimostrazione. Una *deduzione* di  $A$  da  $\Gamma$  in deduzione naturale è una derivazione con conclusione  $A$  in cui le assunzioni non scaricate sono tutte in  $\Gamma$ . Una *prova* di  $A$  è una deduzione di  $A$  in cui tutte le premesse sono scaricate.

Ricorda che  $\neg A =_{df} A \rightarrow \perp$ .

Scrivi prove delle seguenti formule:

- (a)  $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$
- (b)  $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
- (c)  $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg \neg B)$

- (d)  $((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$   
 (e)  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$   
 (f)  $((A \rightarrow \neg B) \rightarrow A) \rightarrow (\neg\neg A).$

**Soluzione modello:**

$$(A \rightarrow (B \wedge C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C))$$

$$((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))$$

$$\frac{\frac{\frac{(3) \quad A \rightarrow (B \wedge C) \quad (1) \quad A}{\rightarrow\text{-E}} \quad \frac{(3) \quad A \rightarrow (B \wedge C) \quad (2) \quad A}{\rightarrow\text{-E}}}{\frac{B \wedge C}{\wedge_1\text{-E}} \quad \frac{B \wedge C}{\wedge_2\text{-E}}} \quad \frac{(1) \quad \frac{B}{A \rightarrow B} \rightarrow\text{-I} \quad (2) \quad \frac{C}{A \rightarrow C} \rightarrow\text{-I}}{\frac{(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)}{\wedge\text{-I}}} \quad (3) \quad \frac{(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)}{A \rightarrow (B \wedge C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C))} \rightarrow\text{-I}}$$

$$\frac{\frac{(2) \quad \frac{(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)}{A \rightarrow B} \wedge_1\text{-E} \quad (1) \quad \frac{(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)}{A \rightarrow C} \wedge_2\text{-E} \quad (1) \quad A}{\frac{B}{\wedge\text{-I}} \quad \frac{C}{\wedge\text{-I}}} \quad \frac{(1) \quad \frac{B \wedge C}{A \rightarrow (B \wedge C)} \rightarrow\text{-I}}{(2) \quad \frac{((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))}{\rightarrow\text{-I}}}$$