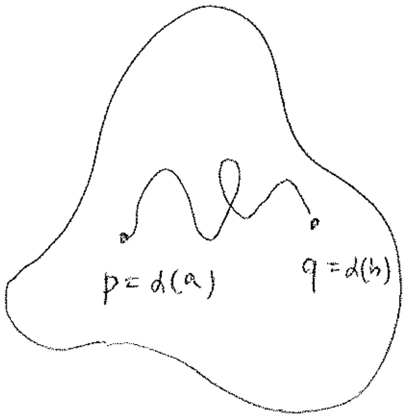
Appunti del corso di GEOMETRIA - Prof. M. Spera

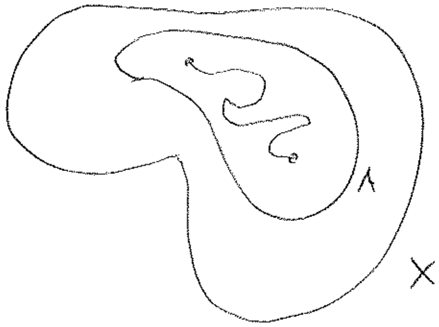
Lezione III

◇ Connessione

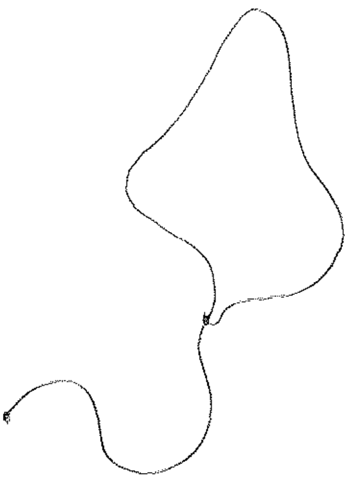
Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico.

Una curva continua $\alpha : [a,b] \to X$ è detta arco in X congiungente $p = \alpha(a)$, $q = \alpha(b)$. Analoga def. per arco in $A \subset X$ (top. relativa)

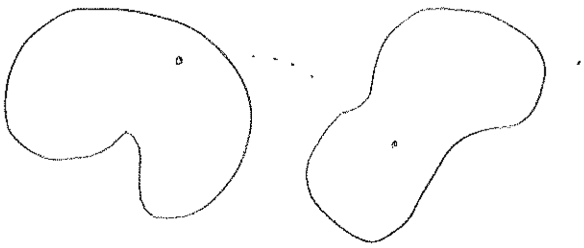




Def. $A \subset X$ è detto connesso per archi se, dati comunque $p, q \in A$, esiste un arco in A che li congiunge. In particolare, se $A = X$, si parla di spazio topologico connesso per archi



connesso per archi



non connesso per archi

Abbreviazione frequente: c.p.a.

E' immediato constatare che se $f: X \to Y$ (X, Y spazi topologici) è continua, allora

$A \subset X$ connesso per archi $\Rightarrow f(A) \subset Y$

connesso per archi. In particolare, se f è un omeomorfismo, X è c.p.a $\Leftrightarrow$ Y è c.p.a.

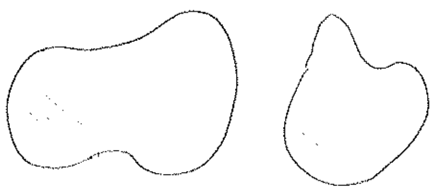
Tale nozione è pertanto topologica.

Def. $(X, \mathcal{T})$ è detto connesso se non è unione di due s. insiemi aperti non vuoti e disgiunti, i.e.

$$X = V_1 \cup V_2, \quad V_i \in \mathcal{T}, \; i=1,2 \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset$$
$$\Rightarrow \quad V_1 = \emptyset \; \vee \; V_2 = \emptyset.$$

Equivalentemente: $X = V_1 \cup V_2$, $\emptyset \neq V_i \in \mathcal{T} \Rightarrow V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$

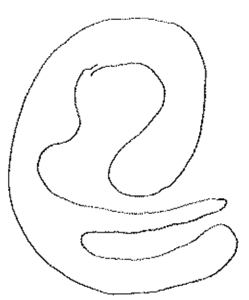
Analoga def. per $A \subset X$, munito della topologia relativa (A è connesso se $(A, \mathcal{T}_A)$ è connesso come sp. topologico...)



A sconnesso
($\equiv$ non connesso)

Prop. $(X, \mathcal{T})$ è connesso $\Leftrightarrow$ gli unici s. insiemi contemporaneamente aperti e chiusi di X sono $\emptyset$ e X stesso.

Dim. $\Rightarrow$ Sia X connesso, e sia $A \subsetneq X$, $A \neq \emptyset$ aperto e chiuso. Ma allora $X \setminus A$ risulterebbe pure aperto e chiuso, e sarebbe non vuoto ($A \neq X$). Pertanto $X = A \cup (X \setminus A)$, con A e $X \setminus A$ aperti, non vuoti e disgiunti. Assurdo. $\square$



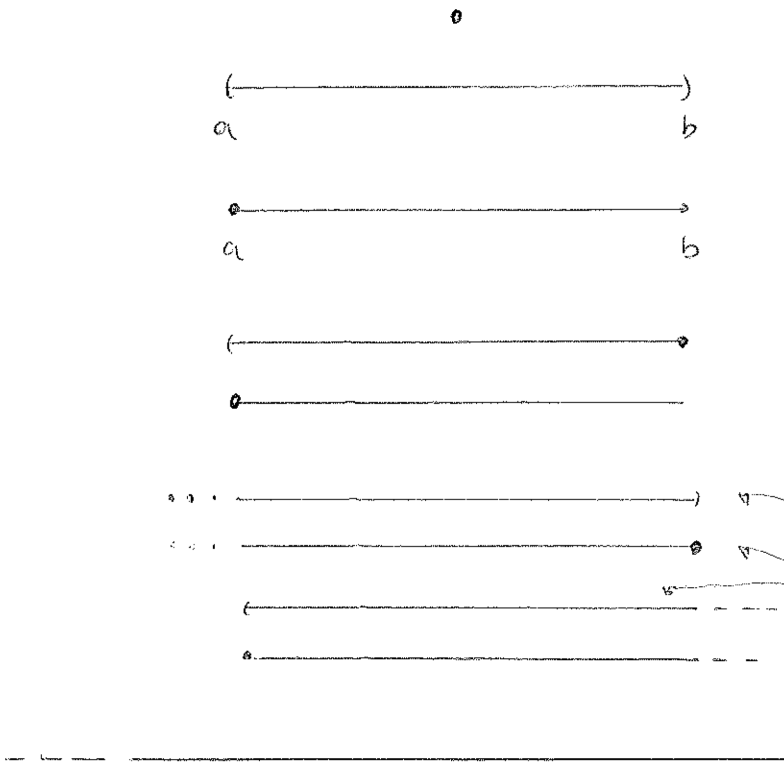
A connesso

$\Leftarrow$ Viceversa, se gli unici s. insiemi aperti e chiusi di X sono ϕ e X stesso, e se $X = A \cup B$, $A, B \in \mathcal{T}$ $A \cap B = \phi$ (ossia $B = X \setminus A$), segue subito che A e B sono anche chiusi, sicché $\{A, B\} = \{\phi, X\}$, e X è connesso.

☆ Prop.: Se $f: X \to Y$ (X, Y sp. topologici) è continua, allora X connesso $\Rightarrow$ $f(X)$ connesso.
In particolare, se $X \approx Y$, X è connesso se e solo se lo è Y (la connessione è una proprietà topologica).

Dim. Per assurdo, sia $f(X)$ sconnessa. Allora
$\exists$ $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_{f(X)}$, $U_i \neq \phi$, $U_1 \cap U_2 = \phi$ tali che
topol. relativa
$f(X) = U_1 \cup U_2$.
In virtù della continuità di f, $f^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}_X$; inoltre
$f^{-1}(U_i) \neq \phi$, $f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = \phi$ e
$f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) = X$, contro l'ipotesi che X sia connesso. Dunque $f(X)$ è connessa.

◇ **Def.** In $\mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ è detto intervallo se è un insieme del tipo $\{a < x < b\}$, $\{a \leq x \leq b\}$, $\{a < x \leq b\}$, $\{a \leq x < b\}$. Non sono esclusi i casi $a = b$ (punto), $a = -\infty$, $b = +\infty$:



punto

intervallo aperto (a,b)

" chiuso $[a,b]$

intervalli semiaperti (a destra e a sinistra) $(a,b]$ $[a,b)$

semiretta aperta

semiretta chiusa

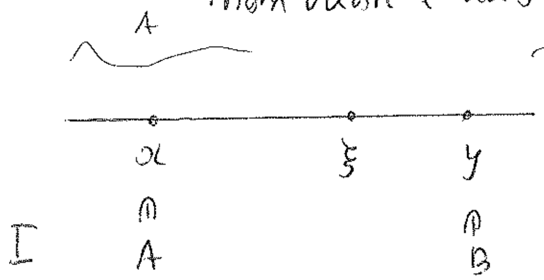
$\mathbb{R}$

Il prossimo teorema caratterizza i s.insiemi connessi di $\mathbb{R}$.

☆ **Teorema** Un sottoinsieme $I \subset \mathbb{R}$ è connesso se e solo se è un intervallo.

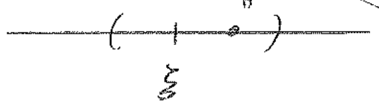
Dim. Sia I un intervallo. Mostriamo che è connesso.

Sia, per assurdo, $I = A \cup B$, A e B aperti, non vuoti e disgiunti. Siano $x \in A$, $y \in B$ e $x < y$ (per fissare le idee). Si ha: $[x,y] \subset I$

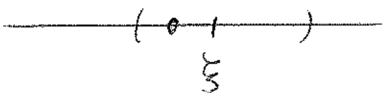


Sia $\xi := \sup(A \cap [x,y])$

Ora, $\xi \notin A$, poiché A è aperto, altrimenti esisterebbero pti di A a destra di ξ, contro la def. di ξ.



$\xi \notin B$ altrimenti, essendo B aperto, esisterebbe un intorno di ξ contenente solo pti di B, ancora in contraddizione con la def. di ξ.



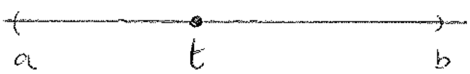
Ma allora $\xi \notin A \cup B = I$, il che è assurdo. $(\xi \in [x,y] \subset I)$. Quindi I è <u>connesso</u>.

<u>Viceversa</u> Sia $A \subset \mathbb{R}$ connesso, mostriamo che è un intervallo. Se $A = \{\text{pto}\}$, è un intervallo; ammettiamo che A contenga almeno <u>due</u> elementi.

Poniamo $a = \inf A$, $b = \sup A$ (in <u>senso generalizzato</u>)

Allora $A \subset [a,b]$.

Mostriamo che $(a,b) \subset A$: ciò implicherà che A è un intervallo. Per assurdo, sia $t \in (a,b)$ tale che $t \notin A$.



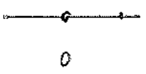
Allora $V_1 = A \cap (-\infty, t)$ e $V_2 = A \cap (t, +\infty)$ sono <u>aperti</u> (in A) e $A = V_1 \cup V_2$, e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Poiché A è connesso, uno dei due insiemi è <u>vuoto</u>, sia per es. $V_2 = \emptyset$.

Ora $b \in (t, +\infty)$, e pertanto $b \notin A$ e b <u>non è pto di accumulazione di A</u>, assurdo poiché $b = \sup A$.

Ragionando in modo analogo su V_1 si giunge nuovamente ad una contraddizione. Dunque A è un intervallo $\square$

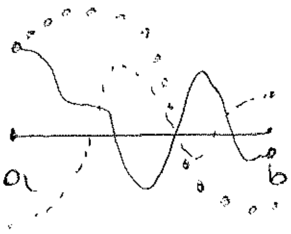
☆ Teorema Sia $f : X \to \mathbb{R}$ continua, X connesso. Sia $f(x) \neq 0$ $\forall x \in X$. Allora f ha segno costante (in X).

Dim: $f(X) \subset \mathbb{R}$ è connesso, dunque è un intervallo che, per ipotesi, non contiene 0, da cui l'asserto.



★ Corollario: (Cf. Analisi I) $f : \underset{\text{intervallo}}{\mathbb{R} \supset I} \to \mathbb{R}$, $I = [a,b]$, f continua, se $f(a)f(b) < 0$, allora $\exists\ \xi \in I$ tale che $f(\xi) = 0$

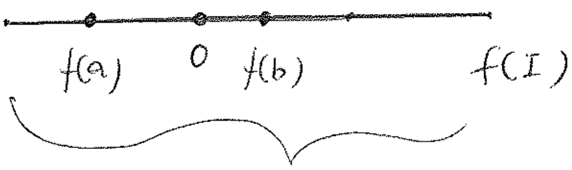
(teorema di Bolzano)



Dim. Per fissare le idee sia $f(a) < 0$, $f(b) > 0$

$f(I)$ è connesso, ed è un intervallo, e necessariamente

$$[f(a), f(b)] \subset f(I)$$



Ma $0 \in [f(a), f(b)]$, dunque $\exists\ \xi \in I$ tale che $f(\xi) = 0$.

☆ Teorema (Poniamoci in $\mathbb{R}^n$, anche se il risultato è generale)

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ connesso. Allora $\bar{A}$ è connessa

(più in generale A connesso $\Rightarrow$ C, $A \subset C \subset \bar{A}$, connesso)

OSS. se $n = 1$ il risultato è stato già dimostrato...

Dim. Sia p.a. $\bar{A}$ sconnesso. Allora $\bar{A} = \bar{U}_1 \cup \bar{U}_2$, $\bar{U}_i$ aperti

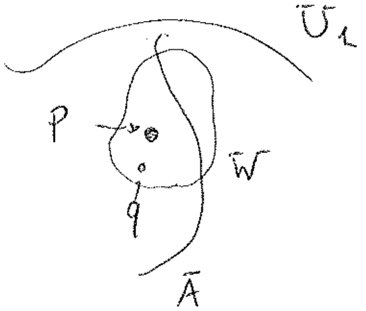
$\bar{U}_i \neq \emptyset$, $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 = \emptyset$. Sia $p \in \bar{A} \setminus A$

(se un tale p non esistesse, sarebbe $\bar{A} = A$ e non ci sarebbe nulla da dimostrare). p è pto di accumulazione di A.

Sia poi $p \in \bar{U}_1$, per fissare le idee. $\bar{U}_1$ è aperto (in $\bar{A}$), dunque $\exists\, W \ni p$, aperto (in $\mathbb{R}^n$), tale che $W \cap \bar{A} \subset \bar{U}_1$.

Inoltre $\exists\, q \neq p \in W \cap A \subset W \cap \bar{A} \subset \bar{U}_1$, poiché p è pto di accumulazione di A. Ma allora $U_1 \neq \emptyset$, assurdo.

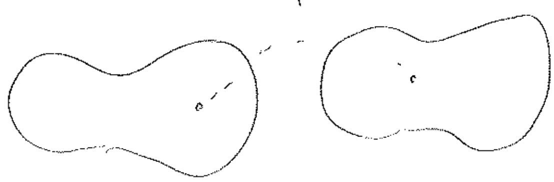
Allo stesso modo si prova che $U_2 \neq \emptyset$, e si conclude $\square$



Def. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico. Esso è detto localmente connesso per archi (l.c.p.a.) se $\forall\, x \in X$, $\forall$ intorno $V \ni x$ (aperto contenente x), $\exists\, U \subset V$, $U \ni x$, intorno di x connesso per archi. { Analoga def. per un sottoinsieme.

[esempio tipico, v. oltre: superficie regolare]

1. l.c.p.a $\not\Rightarrow$ c.p.a.



2. c.p.a $\not\Rightarrow$ l.c.p.a.

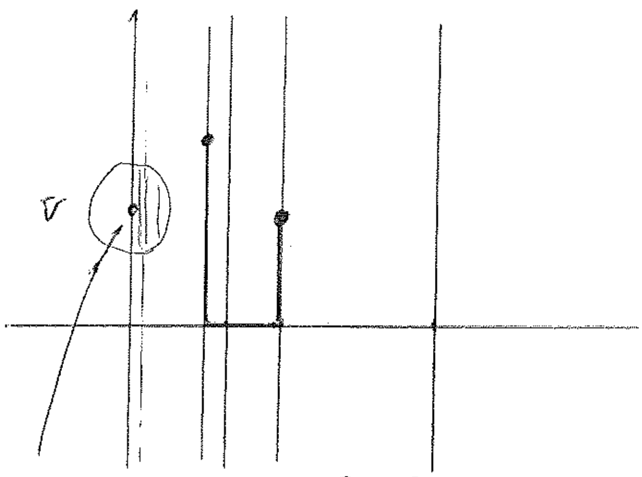
esempio: il pettine

⟶

☆ pettine

$X = \{y=0\} \cup \{x=0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x = \frac{1}{n}\}$

connesso per archi
ma
non localmente connesso per archi

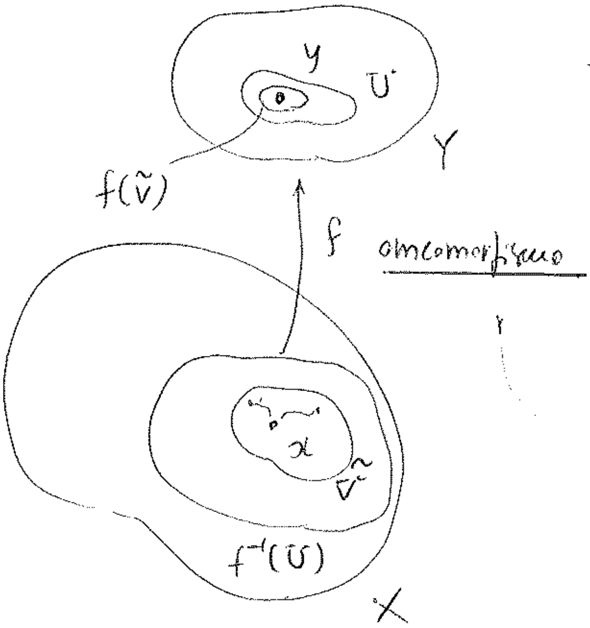


un tale V non possiede un $U \subset V$ connesso per archi

Siano X, Y spazi topologici, $f : X \to Y$ continua, X l.c.p.a $\Rightarrow$ Y l.c.p.a. In particolare, la locale connessione per archi è una proprietà topologica: cominciamo a dire. Sia f omeomorfismo.

Sia $y \in Y$, $U \ni y$, intorno.

Si consideri $f^{-1}(U) \subset X$. Sia $x \in X$ t.c. $f(x) = y$ $(x = f^{-1}(y))$.



$f^{-1}(U)$ è intorno di x, e contiene $\tilde{V} \ni x$ connesso per archi; ma allora $f(\tilde{V}) \subset U$ ed è un intorno di y connesso per archi (è aperto poiché f è aperta). □

Teorema Sia (X, τ) uno spazio topologico.

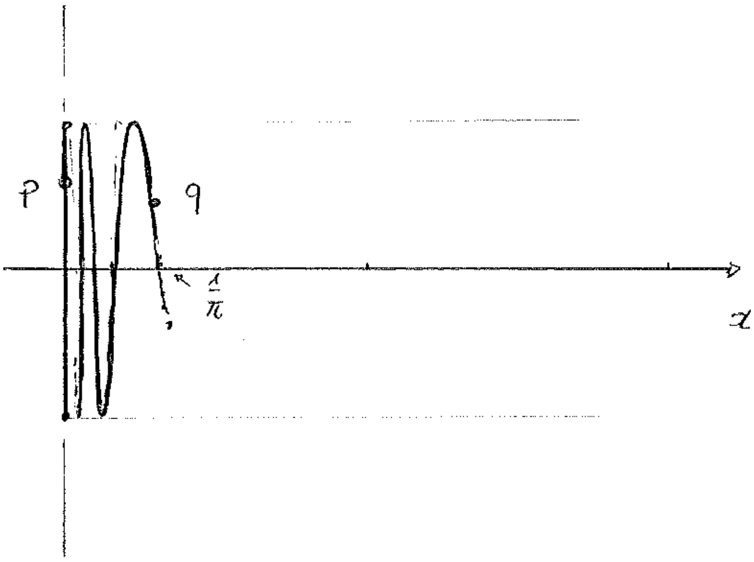
1. X c.p.a. $\Rightarrow$ X connesso.
2. Se X è l.c.p.a, allora

   X c.p.a $\Leftrightarrow$ X connesso.

Il viceversa di 1 è <u>falso</u>:

Esempio ("funzione seno del topologo")

$$\text{Sia } A = \{0\} \times [-1,1] \cup \underbrace{\{(x, \sin \tfrac{1}{x})\}_{x>0}}_{B \text{ — connesso}}$$



A è <u>connesso</u> poichè $A = \overline{B}$, B connesso.

Ma <u>non è</u> <u>connesso per archi</u>...

per ex, non esiste nessun arco congiungente p e q..

Dimostriamo 1. Se, p.a. X <u>fosse sconnesso</u>,

$X = U_1 \cup U_2$ (aperti non vuoti e disgiunti).

Siano $p \in U_1$, $q \in U_2$, e sia $\alpha : [a,b] \to X$

un arco congiungente p a q. In virtù della continuità

di α, $B := \alpha([a,b])$ è <u>connesso</u>. Posto

$V_i = B \cap U_i$, $i=1,2$, $B = V_1 \cup V_2$, V_i aperti non vuoti

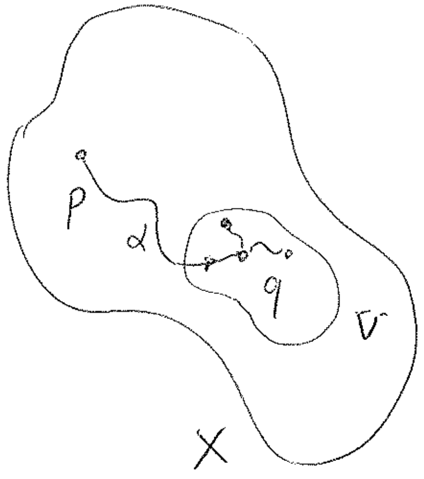
e disgiunti (in B), il che è assurdo. $\square$

Dim. 2. È sufficiente provare "$\Leftarrow$".

Sia X connesso (non vuoto..). Sia $p \in X$ e sia

$X_1 = \{$ pti di X raggiungibili da un arco uscente da p $\}$

$\equiv \{ q \in X \ / \ \exists \ \alpha : [a,b] \to X$, continua, $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = q \}$



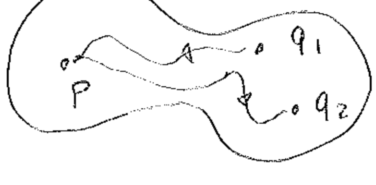
Dimostriamo che $X_1 = X$.$^{(+)}$

Ora, X_1 è aperto: Dato $q \in X_1$ e α, arco che lo congiunge a p, per la locale connessione per archi, esiste $V \ni q$ intorno di q, per i pti del quale si può condurre un arco che li congiunga a q, contenuto in V;

☆ è immediato allora costruire un arco congiungente p ad ognuno di questi punti.

Analogamente, $X \setminus X_1$ è pure aperto, sicché X_1 è aperto e chiuso. Dalla connessione di X e dal fatto che $X_1 \neq \emptyset$ segue $X = X_1$, e concludiamo. $\square$

(+) Ciò basta per concludere: dati $q_1, q_2 \in X$, questi possono essere congiunti con p, e dunque tra loro.



☆ Esempi ed esercizi

◆ Sia $n \geq 1$ $\quad S^n$ è connessa.

Infatti $\mathbb{R}^{n+1}$ è connesso, e così lo è $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$.

(! se $n = 0$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ non è connesso: non è un intervallo)

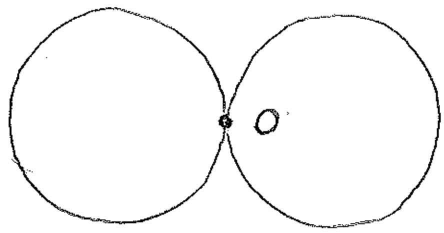
Si consideri l'applicazione

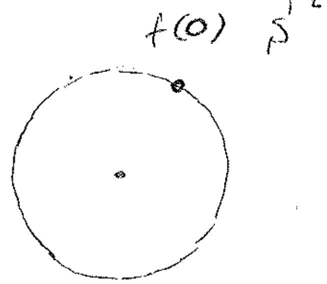
$$f: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\} \to S^n$$

$$\underset{\neq (0, \dots 0)}{x = (x_1, \dots x_{n+1})} \longmapsto \left(\frac{x_1}{\|x\|}, \dots \frac{x_n}{\|x\|} \right) \equiv f(x)$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2}$$

f è continua e suriettiva, e ciò basta per concludere

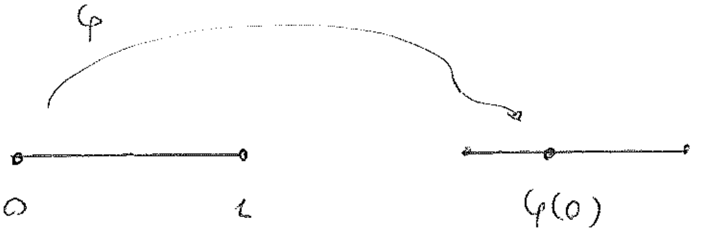
◆ $X =$ 



$X \not\simeq S^1$: Sia per assurdo $f: X \to S^1$ un omeomorfismo; allora $S^1 \setminus \{f(O)\}$ e $X \setminus \{O\}$ sarebbero ancora omeomorfi (tramite f stessa, ristretta), ma $S^1 \setminus \{f(O)\}$ è connesso, mentre $X \setminus \{O\}$ non lo è.

◈ Non esiste nessun omeomorfismo di $I = [0,1]$ in sé che mandi, ad ex 0 in un punto interno:

?



$I \setminus \{0\}$ è connesso

$I \setminus \{\varphi(0)\}$ non è connesso

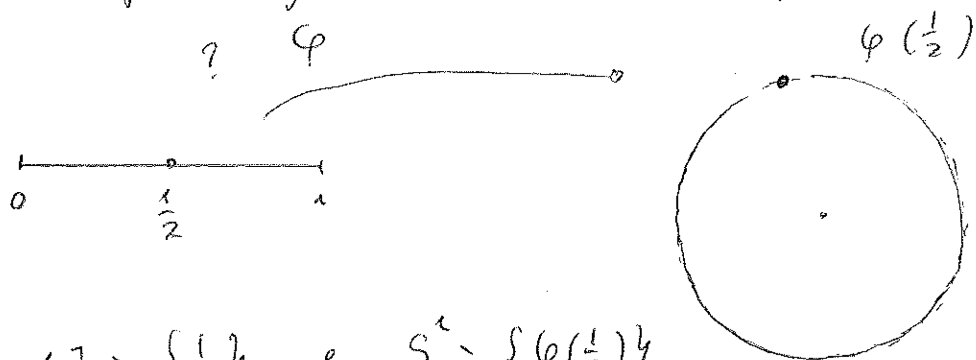
pertanto, ogni omeomorfismo manda 0 in 0 oppure in 1.

◈ $[0,1] \not\approx (0,1]$

compatto non compatto

◈ $[0,1] \not\approx S^1$

Sia p.a. $\varphi : [0,1]$ omeomorfismo.



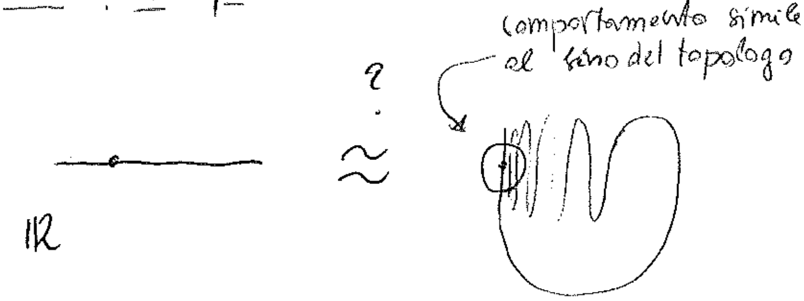
$[0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ e $S^1 \setminus \{\varphi(\frac{1}{2})\}$

risulterebbero omeomorfi, ma ciò è impossibile:

$[0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ non è connesso, $S^1 \setminus \{\varphi(\frac{1}{2})\}$ lo è.

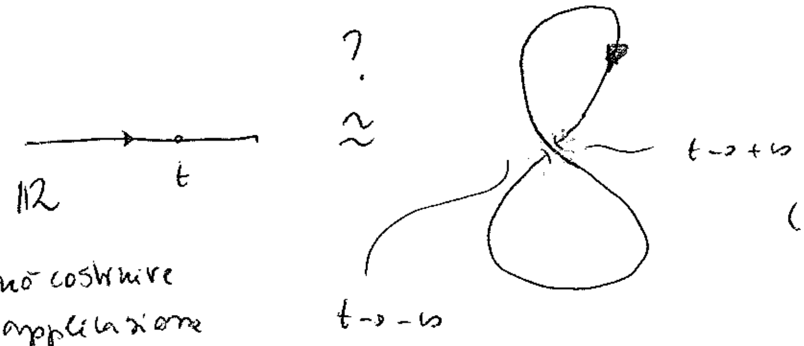
◈ Nell'ambito degli spazi metrici, la limitatezza non è una proprietà topologica: $\mathbb{R}$ e $(-1,1)$ sono omeomorfi ma, visti come spazi metrici (con la loro metrica naturale), $(-1,1)$ è limitato, $\mathbb{R}$ no.

Altri esempi [assumiamo che le curve date siano sufficientem. "regolari"! v. oltre]



$\overset{?}{\approx}$

NO :  non è localmente connesso per archi

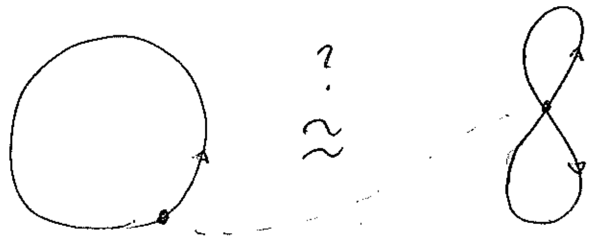


$\overset{?}{\approx}$

si può costruire un'applicazione continua e iniettiva...

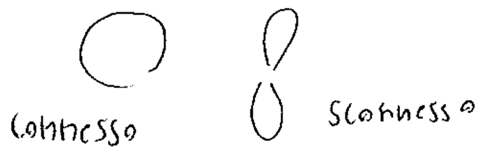
NO :  è compatto

(sia come s. insieme di $\mathbb{R}^2$ che in sé, munito della topologia relativa

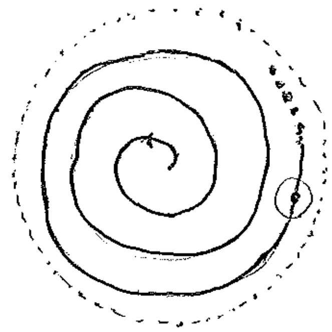


$\overset{?}{\approx}$

NO : già visto:



(anche se i due spazi sono entrambi compatti e connessi)



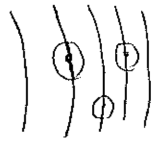
$\approx$

( escluso)

Sì! se  è munito della topologia relativa

tra l'altro  è, in sé, chiuso

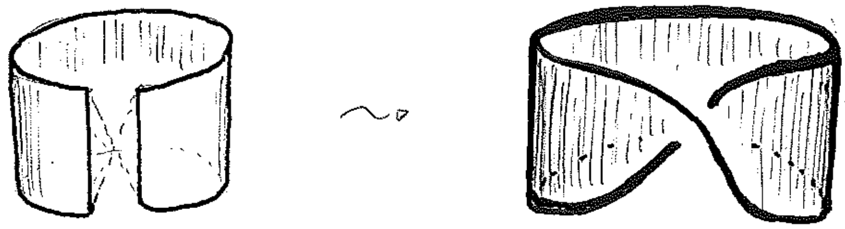
(ma non lo è come s. insieme di $\mathbb{R}^2$);



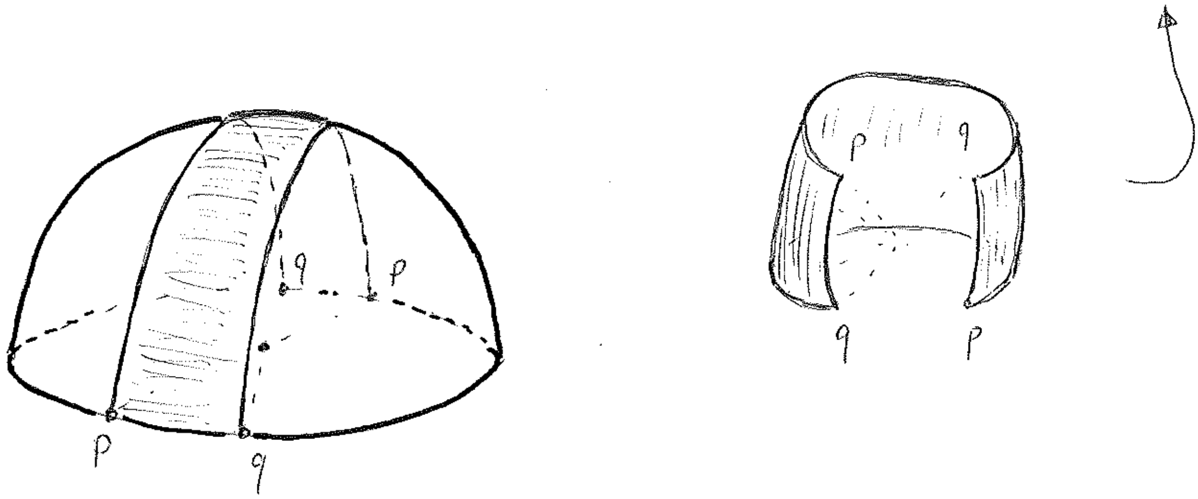
non è compatto [per esserlo, dovrebbe essere chiuso e limitato come s. insieme di $\mathbb{R}^2$, e solo la seconda condizione è soddisfatta]

★ La spirale, unita al ciclo limite, dà vita ad uno spazio connesso ma non localmente connesso per archi (da sola lo è...) [chiusura di un connesso]

Il <u>nastro di Möbius</u> è, storicamente, il primo esempio trovato di <u>superficie</u> <u>non</u> <u>orientabile</u> ("ad una sola faccia")



È subito visto che il <u>piano</u> <u>proiettivo</u> $\mathbb{RP}^2$ ha la stessa proprietà, contenendo un tale nastro:



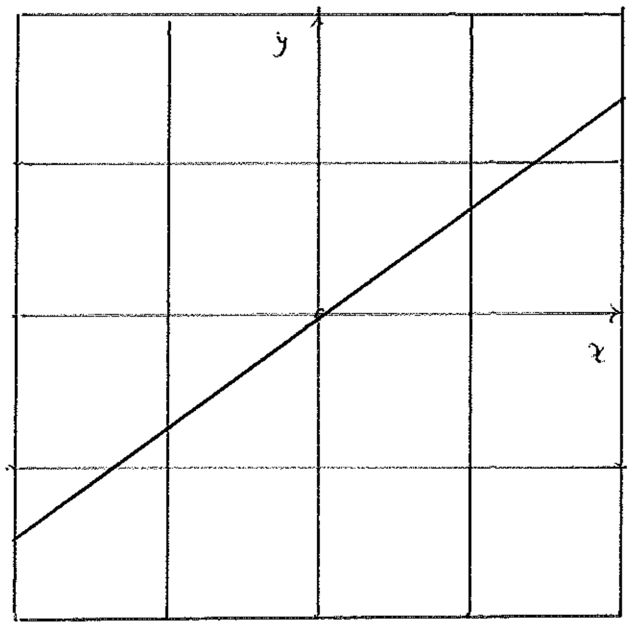
☆ <u>Teorema</u> Sia $\varphi_\vartheta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}^2 = \square/\sim$

l'applicazione indotta da $\tilde{\varphi}_\vartheta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \longmapsto \tilde{\varphi}_\vartheta(t) := (t, \vartheta t)$ $\vartheta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Allora $\overline{\varphi_\vartheta(\mathbb{R})} = \mathbb{T}^2$ (l'immagine di φ è <u>densa</u> in $\mathbb{T}^2$)

<u>Complemento: il flusso di Krönecker</u> cf. corso di "Sistemi Dinamici"



$y = \vartheta x$

$\begin{cases} x = t \\ y = \vartheta t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

<u>Dim.</u> Utilizziamo il <u>teorema</u> <u>della</u> <u>media</u> (teorema ergodico) : se $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^2)$,

si può anche procedere per via elementare

è $\bar{f} := \iint_{\mathbb{T}^2} f$ <u>media spaziale</u>

$$\|$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_\vartheta(t))\, dt$$ <u>media temporale</u>

$\boxed{\square \quad \infty}$

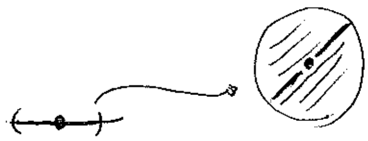
Precisamente: il secondo membro esiste ed eguaglia il primo.

Sia allora, per assurdo, $\mathcal{D}$ un dominio disgiunto da $\varphi(\mathbb{R})$. Si consideri una funzione continua f nulla al di fuori di $\mathcal{D}$ tale che $\iint_{\mathcal{D}} f = 1$.

Si ha allora $\int_0^T f(\varphi_{\nu}(t))\,dt = 0 \quad \forall\, T \in \mathbb{R}$

Pertanto, il teorema della media fornisce $1 = 0$, il che è assurdo. Dunque $\overline{\varphi(\mathbb{R})} = \mathbb{T}^2$ $\square$

* Corollario: $\varphi : \mathbb{R} \to \varphi(\mathbb{R})$ non è un omeomorfismo
[$\varphi(\mathbb{R})$ dotata della top. relativa]



non è localmente connesso per archi

* Cenno di dim. del teorema della media.

Il teorema vale per i polinomi trigonometrici (in due variabili) (verifica diretta). Ma questi sono densi in $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^2)$ (rispetto alla topologia uniforme): teorema di Weierstraß.

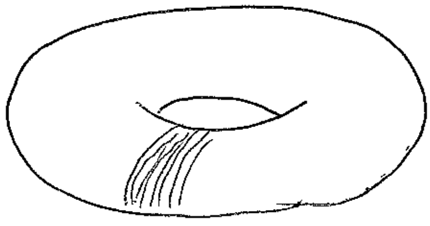
[Tale proprietà garantisce il passaggio al limite sotto il segno di integrale: $f_n \rightrightarrows f \implies \int_a^b f_n \to \int_a^b f$]

conv. uniforme

a b

int. chiuso e limitato

Ciò conduce subito alla conclusione...



☆ Digressione su $SO(3)$ [è possibile una trattazione esaustiva tramite l'impiego dei quaternioni, ma per ora ci accontenteremo di alcune osservazioni preliminari]

$$SO(3) = \{ O \in M_3(\mathbb{R}) \ / \ \underbrace{O^T O = O^T O = I_3}_{O(3)}, \ \det O = +1 \}$$

gruppo ortogonale speciale

$O \in O(3) \iff O$ conserva il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^3$ $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$:

infatti

$$\langle x, y \rangle = x^T y = x^T \cdot I_3 \cdot y \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\langle Ox, Oy \rangle = (Ox)^T Oy = x^T O^T O y$$

$$\langle Ox, Oy \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \iff O^T O = I_3 \quad (*)$$

Si ha, necessariamente $\det O = \pm 1$: la $(*)$ infatti porge $1 = \det O^T O = \det O^T \cdot \det O$ (Binet)

$$= (\det O)^2 .$$

Leggendo O come elemento di $U(3)$ (gruppo unitario di $\mathbb{C}^3$: $U(3) = \{ U \in M_3(\mathbb{C}) \ / \ U^T U = U U^T = I_3 \}$)

è $\det O = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ (autovalori)

da $\| Ov \| = \| v \|$ ($v \in \mathbb{R}^3$ o $v \in \mathbb{C}^3$, con le norme rispettive) segue che se $Ov = \lambda v$, $v \neq 0$ (v autovettore), è $|\lambda| = 1$.

Ora, P_C^O è un polinomio reale di 3° grado, dunque ammette una radice reale $(= \pm 1)$ e due radici complesse coniugate $e^{\pm i\alpha}$, in generale

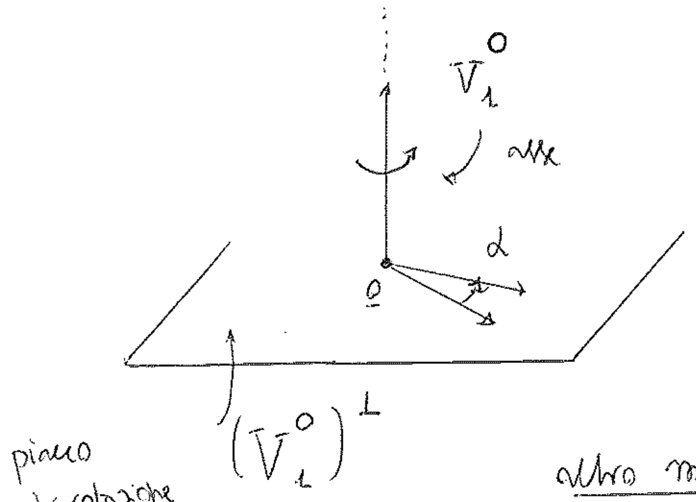
polinomio caratteristico di O

Da $\det O = 1$ segue che una delle radici vale $+1$;

Escludendo il caso banale (ponendoci in forma diagonale; ciò è possibile in generale in $\mathbb{C}^3$) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3}$ identità, abbiamo un autospazio unidimensionale, in $\mathbb{R}^3$, corrispondente a $\lambda = 1$

Si giunge, per via algebrica, al teorema di Eulero:

ogni elemento di $SO(3)$ è una rotazione attorno ad un asse (l'autospazio). L'angolo di rotazione α (previa scelta di un' orientamento dell'asse) si ottiene calcolando gli autovalori



(il pol. caratteristico ha sempre una radice $\lambda = 1$, le altre si ottengono dal polinomio di 2° grado ottenuto dividendo per $\lambda = 1$ ...)

altro metodo: preso $v \in (V_1^0)^\perp$,

si ha $\cos\alpha = \langle v, Ov \rangle$

Sia ora $\mathbb{R} \ni t \mapsto R(t) \in SO(3)$

una f. liscia tale che $R(t+s) = R(t)R(s) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$

(sottogruppo ad un parametro di $SO(3)$: si noti che * definisce un omomorfismo tra i gruppi $(\mathbb{R}, +)$ e $(SO(3), \cdot_{\text{R molt.}})$

si ha $R(0) = R(0)R(0) \Rightarrow R(0) = I$

Si fissi s. Calcoliamo

$$\frac{R(t+s) - R(s)}{t} = \frac{R(t)\,R(s) - R(s)}{t} =$$

$$= \frac{(R(t) - I_3)}{t}\,R(s) \xrightarrow[t \to 0]{} R'(0)\,R(s)$$

ossia $\forall s \in \mathbb{R}$

$$\boxed{R'(s) = \underbrace{R'(0)}_{A}\,R(s) \qquad R(0) = I}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R(s) = \exp sA}$$

Si noti che $R'(0) = A$ è antisimmetrica:

$$\boxed{A^T + A = 0 \qquad (\star)}$$

infatti da $R^T R = I$ segue

$$(R^T)'R + R^T R' = 0$$

$$\Rightarrow \quad (R')^T R + R^T R' = 0$$

e, calcolando in $t = 0$ (e dato che $R(0) = I_3$)

si arriva a $(\star)$.

A è detto generatore infinitesimale del gruppo ad un parametro

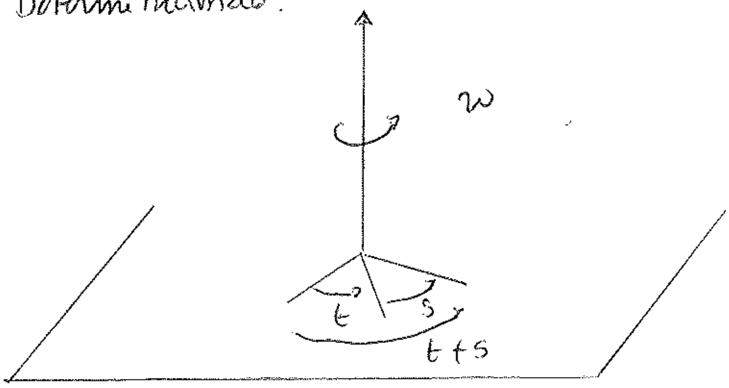
[Le matrici antisimmetriche costituiscono l' algebra di Lie di $SO(3)$..]

In forma equivalente: sia $\xi_0 \in \mathbb{R}^3$ un vettore generico. Posto $\xi(t) := R(t)\xi_0$ (sicché $\xi(0) = \xi_0$), si ha $\mathring{\xi}(t) = \dot{R}(t)\xi_0 = A\,R(t)\xi_0 = A\,\xi(t)$

$$(\diamond) \qquad \mathring{\xi} = A\,\xi \qquad\qquad \xi(0) = \xi_0$$

$$\Rightarrow \qquad \xi(t) = \exp(tA)\,\xi_0$$

Si noti che, geometricamente, le $R(t)$ (tra loro commutanti) sono rotazioni attorno ad un medesimo asse. Determiniamolo.



Poniamo $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^T = -A$

$\det A = \det(-A^T)$
$= (-1)^3 \det(A^T) =$
$= -\det A$
$\Downarrow$
$\det A = 0$

Sia $\quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \Big\{$ $r(A) = 2$ rango chiaro... $\leadsto$

$r(A) = 2 \Rightarrow \nu(A) = 3 - 2 = 1$
si trova subito $\quad \ker A = \langle w \rangle \qquad A\,w = \underline{0}$
e w è l'<u>asse di rotazione</u> <u>cercato</u>: $\quad (\exp tA)\,w =$

$$(1 + tA + \dots)\,w = w + t\underbrace{A\,w}_{\overset{\parallel}{\underline{0}}} + \underbrace{\dots}_{\overset{\parallel}{0}}$$

La ($\star$) può vedersi anche nel modo seguente:

posto $\quad \underline{\xi} = \xi_1 \underline{i} + \xi_2 \underline{j} + \xi_3 \underline{k}$

$\quad\quad\quad \underline{w} = w_1 \underline{i} + w_2 \underline{j} + w_3 \underline{k} \quad \dots$ è

$$\dot{\underline{\xi}} = \underline{w} \times \underline{\xi} \qquad (\text{e} \quad \underline{\xi}(0) = \underline{\xi}_0)$$

$\times$: prodotto vettoriale :

$$\underline{w} \times \underline{\xi} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i} \begin{vmatrix} w_2 & w_3 \\ \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} + \underline{j} \begin{vmatrix} w_3 & w_1 \\ \xi_3 & \xi_1 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{i} \left[w_2 \xi_3 - w_3 \xi_2 \right] + \underline{j} \left[w_3 \xi_1 - w_1 \xi_3 \right] + \underline{k} \left[w_1 \xi_2 - w_2 \xi_1 \right]$$

D'altro canto $\quad A \xi = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} w_2 \xi_3 - w_3 \xi_2 \\ w_3 \xi_1 - w_1 \xi_3 \\ w_1 \xi_2 - w_2 \xi_1 \end{pmatrix}$$, da cui l'asserto.

|| Il vettore geometrico $\underline{w}$ è chiamato vettore <u>velocità angolare</u>.

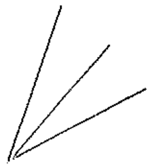
Approfondimento

risolviamo, in generale, il seguente problema di Cauchy

☆ $$\boxed{R'(t) = A(t)\,R(t) \qquad R(0) = R_0 = I}$$

(famiglia di rotazioni con asse variabile...)

$\omega = \omega(t)$



$$\left(\xi' = \omega \times \xi \ \ldots \right)$$

⚠ non $\int$

Si può far vedere che

$$R(t) = I + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{0 \le t_1 \le t_2 \le \dots \le t_m \le t} A(t_m)\,A(t_{m-1}) \cdots A(t_1)\, dt_1\, dt_2 \cdots dt_m$$

spesso chiamato *integrale iterato di Chen*

$$\equiv \exp\left(: \int_0^t A(x)\, dx : \right)$$

: notazione di Wick

la serie converge...

☆ esponenziale a tempo ordinato

[cui si può dar senso anche come "integrale prodotto" alla Volterra

$$\prod_0^t e^{A(x)\,dx}$$

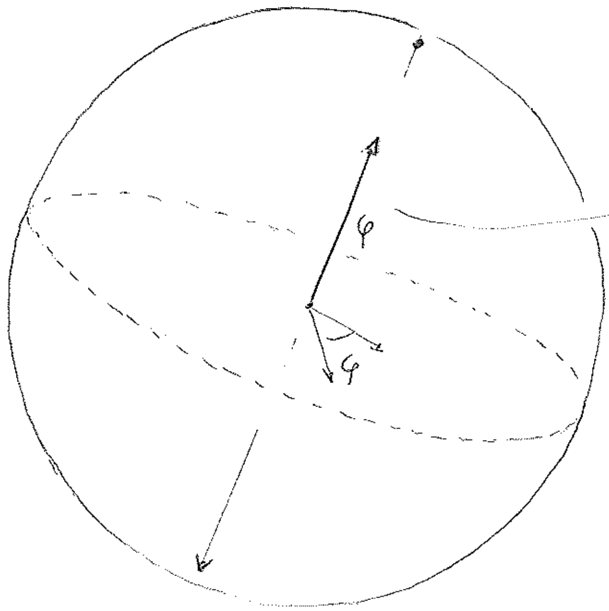
cf. l'identità di Eulero

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$$

La ☆, e la relativa soluzione, sussistono in contesti molto generali...

Notiamo infine, che, come spazio topologico, $SO(3)$ può vedersi come $\mathbb{RP}^3$ (spazio proiettivo reale)

Sfera (piena) di raggio $R = \pi$ con i punti antipodali del bordo identificati



asse di una rotazione generica, di angolo φ opportunamente orientato; se $\varphi = \pm\pi$, si ottiene la stessa rotazione