

Foglio di esercizi su spazi vettoriali, sottospazi, generatori e basi

Sansonetto Nicola*

Esercizio 1 (Punti 8). Si decida se i seguenti enunciati sono veri o falsi (motivando la risposta):

1. Esiste un'applicazione lineare suriettiva $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con nucleo $\text{Ker } f = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.
2. Esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con immagine $\text{Im } f = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.
3. Esiste un'applicazione lineare iniettiva $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con immagine $\text{Im } f = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.
4. Esiste una matrice non invertibile $A \in M_{3 \times 3}$ con $N(A) = 0$.

Esercizio 2 (Punti 8). Si consideri la matrice $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Determinare la scomposizione $\mathbb{R}^4 = N(A) \oplus C(A^H)$
2. Risolvere il sistema lineare $Ax = b$ dove $b = (4, 0, 11)^T$.

Esercizio 3 (Punti 8). Si dimostrino i seguenti enunciati:

1. Siano V, W due spazi vettoriali su \mathbb{C} con un'applicazione lineare $f : V \rightarrow W$ e siano $v_1, \dots, v_n \in V$.
 - (a) L'insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ è linearmente indipendente se lo è l'insieme $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$.
 - (b) $\dim \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \dim \langle \overline{v_1}, \dots, \overline{v_n} \rangle$
2. Siano $u, v \in \mathbb{C}$. L'applicazione $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto uz + vz$ è sempre \mathbb{R} lineare, ma è \mathbb{C} -lineare se e solo se $u = 0$.

Esercizio 4 (Punti 6). ● Siano V, W due spazi vettoriali su un campo K con due applicazioni lineari $f : W \rightarrow V$ e $g : V \rightarrow W$.

1. Se $g \circ f$ è un isomorfismo, allora $V = \text{Im } f \oplus \text{Ker } g$.
2. Si dia un esempio di applicazioni lineari f e g come sopra dove $f \circ g$ non è un isomorfismo.

N.B.

Il simbolo ● denota esercizi giudicati **difficile**.

*e-mail: nicola.sansonetto@gmail.com