ALGEBRA LINEARE CON ELEMENTI DI GEOMETRIA

modulo: ELEMENTI DI GEOMETRIA (Prof. M. Spera)

Prova scritta del 1° febbraio 2011

① Nello spazio euclideo, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, siano $P:(1,0,1)$ e $r = \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$

Determinare, possibilmente in più modi, il pto $H \in r$ a distanza minima da P. Determinare la sfera passante per P e tangente in H al piano π' del fascio di asse r, perpendicolare alla retta PH.

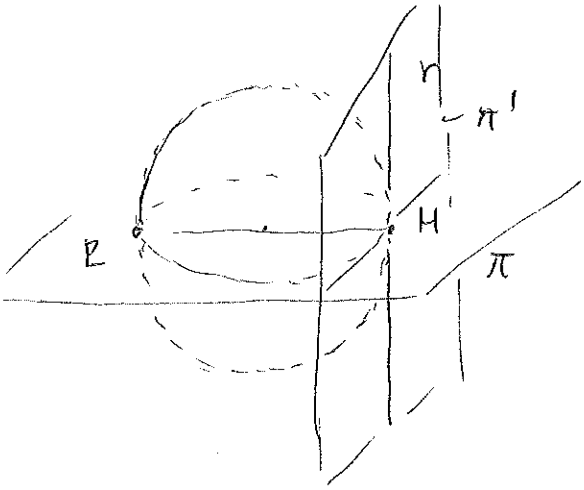
② Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, e ampliato proiettivamente, si determini la conica $\mathcal{C}$ tangente a r_∞ in $[0,2,1]$, con vertice $V:[1,1,1]$, e tangente a $s: x=-1$. Verificato che si tratta di una parabola, determinarne fuoco e direttrice, nonché abbozzarne il grafico.

Tempo a disposizione: 1h 15m - Le risposte vanno adeguatamente giustificate

①

Elementi di Geometria
1° Febbraio 2011

$P: (1, 0, 1)$ $\qquad r: \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$



Determiniamo H, punto di minima distanza di P da r

direzione di r: individuata da

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}_{2+1=3} - \underline{j} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{2-1=1} + \underline{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$-1-1=-2$

$$= 3\underline{i} - \underline{j} - 2\underline{k} \quad \Rightarrow \text{dir} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

π: Piano per P $\perp r$, $\qquad 3(x-1) - y - 2(z-1) = 0$

$$3x - 3 - y - 2z + 2 = 0$$

$$\boxed{\pi: \; 3x - y - 2z - 1 = 0}$$

$\pi \cap r: \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+2z=0 \\ 3x-y-2z-1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+3z=0 \\ 2y-z=0 \\ 3x-y-2z-1=0 \end{cases} \qquad x = -\frac{3}{2}z \qquad y = \frac{z}{2}$

$3\left(-\frac{3}{2}z\right) - \frac{z}{2} - 2z - 1 = 0$

$-\frac{9}{2}z - \frac{z}{2} - 2z - 1 = 0$

$-7z - 1 = 0 \qquad z = -\frac{1}{7}$

$H = \left(\frac{3}{14}, -\frac{1}{14}, -\frac{2}{14}\right)$

$\Rightarrow H: \left(\frac{3}{14}, -\frac{1}{14}, -\frac{1}{7} \right) \quad (H \in r \ \checkmark)$

$$\begin{array}{r} 64 \\ 4 \\ \hline 256 \\ 122 \\ \hline 378 \end{array}$$

$$\overline{PH}^2 = \left(1 - \frac{3}{14}\right)^2 + \left(+\frac{1}{14}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{7}\right)^2 =$$

$$= \frac{11^2}{14^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{8^2}{7^2} = \frac{121 + 1 + 64 \cdot 4}{14^2} = \frac{378}{14^2} = \frac{42 \cdot 9}{14^2} =$$

$$= \frac{14 \cdot 27}{14^2} = \frac{27}{14} \Rightarrow \overline{PH} = \sqrt{\frac{27}{14}}$$

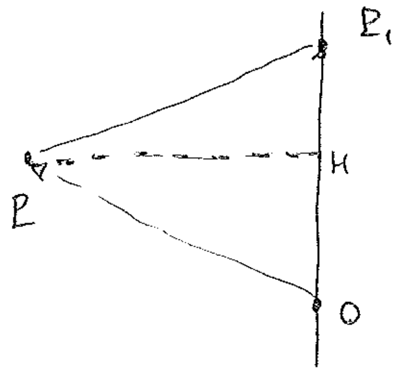
altro modo: prendiamo due pti di r

$$\begin{cases} x = t \\ z = -\frac{2}{3} t \end{cases}$$

$y = -z - x = \frac{2}{3} t - t = -\frac{1}{3} t$

ex: $O: (0,0,0)$ e $P_1: (3, -1, -2)$

$$\overline{OP_1} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$$



$$2A(OP_1P) = \|\vec{OP} \times \vec{OP_1}\|$$

$$\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} \right\|$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{1}{3} t \\ z = -\frac{2}{3} t \end{cases}$$

(controllo col calcolo prec $\checkmark$)

$$= \sqrt{1 + \underbrace{(-2-3)^2}_{25} + 1} = \sqrt{27}$$

$$\overline{PH} = \frac{2A}{\overline{OP_1}} = \sqrt{\frac{27}{14}} \quad \checkmark$$

altro modo:

$$2A = \sqrt{\|\vec{OP}\|^2 \|\vec{OP_1}\|^2 - \langle \vec{OP}, \vec{OP_1} \rangle^2}$$

$$= \sqrt{14 \cdot 2 - (3 - 2)^2}$$

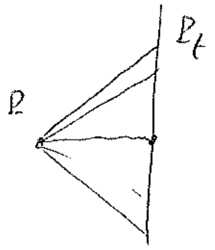
$$= \sqrt{28 - 1} = \sqrt{27} \quad \checkmark$$

Ancora una variante (controllo)

$$P_t : \left(t , -\frac{1}{3} t , -\frac{2}{3} t \right)$$

$$f(t) := \overline{P P_t}^2 = (t-1)^2 + \frac{1}{9} t^2 + \left(-\frac{2}{3} t - 1\right)^2 = (t-1)^2 + \frac{1}{9} t^2 + \left(\frac{2}{3} t + 1\right)^2$$

$$f'(t) = 2(t-1) + \frac{2}{9} t + 2\left(1 + \frac{2}{3} t\right) \cdot \left(+\frac{2}{3}\right) = 0$$



$$2t - 2 + \frac{2}{9} t + \frac{4}{3}\left(1 + \frac{2}{3} t\right) = 0$$

$$2t - 2 + \frac{2}{9} t + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} t = 0$$

$$\left(2 + \frac{2}{9} + \frac{8}{9} \right) t - 2 + \frac{4}{3} = 0 \qquad \left(f''(\tilde{t}) > 0 , \text{ min.} \right)$$

$$\frac{10 + 18}{9} t + \frac{-6 + 4}{3} = 0$$

$$\frac{\cancel{28}^{14}}{9} t - \frac{\cancel{2}^{1}}{3} = 0 \qquad 14t - 3 = 0 \qquad t = \frac{3}{14}$$

$$H = \left(\frac{3}{14} , -\frac{1}{14} , \underbrace{-\frac{2}{14}}_{= -\frac{1}{7}} \right) \quad \checkmark$$

Sfera tangente a π' in H : centro $C = \dfrac{P + H}{2} = \left(\dfrac{1 + \frac{3}{14}}{2} , -\dfrac{1}{28} , \dfrac{1 - \frac{2}{14}}{2} \right)$

$$= \left(\frac{17}{28} , -\frac{1}{28} , \overset{\frac{12}{28} \,\|}{\frac{6}{14}} \right) = \left(\frac{17}{28} , -\frac{1}{28} , \frac{3}{7} \right) = C$$

Raggio $R = \dfrac{\overline{PH}}{2} = \dfrac{1}{2} \sqrt{\dfrac{27}{14}} \qquad R^2 = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{27}{14} = \dfrac{27}{56}$

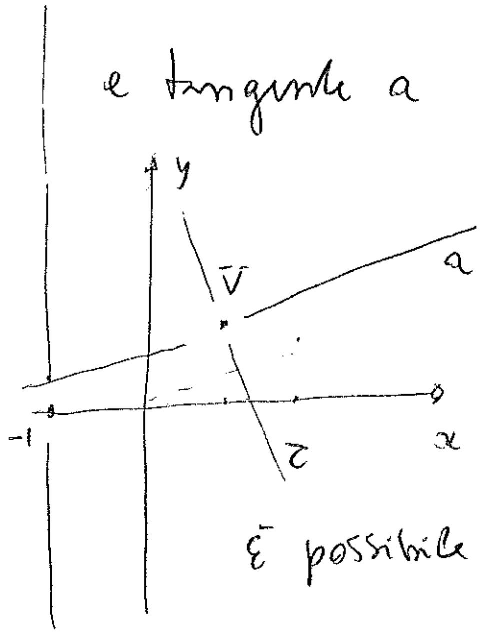
Elementi di Geometria

1° Febbraio 2011

(2) Conica $\mathcal{C}$ tangente a r_∞ in $[0,2,1]$,

vertice in $V: [1, 1, 1]$

e tangente a $s: \quad x = -1$.



Tipo affine e metrico

fuoco e direttrice.

Sol. Si tratta ovviamente di una **parabola**

È possibile det. subito l'asse : $a: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \end{cases}$

ovvero $a:$ $\quad x-1 = 2t$
$\quad y-1 = t \qquad x-1 = 2(y-1)$

$$x - 1 - 2y + 2 = 0$$

$$\boxed{a: \ x - 2y + 1 = 0}$$

controllo $m = \frac{1}{2}$

passa per V $\quad 1-2+1=0$

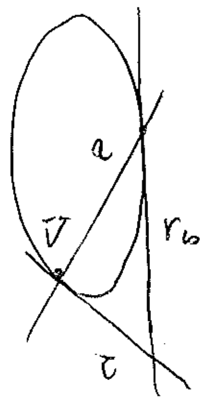
la tangente τ a $\mathcal{C}$ passante per V è $\perp$ a

l'eq. è $\quad \tau: \quad y-1 = -2(x-1) \qquad m^{\perp} = -\frac{1}{m} = -2$

$$y - 1 + 2(x-1) = 0$$

$$2x + y - 1 - 2 = 0$$

$$\boxed{\tau: \ 2x + y - 3 = 0}$$



γ appartiene al fascio di coniche bitangenti

$$r_\infty \cdot \tau + \lambda a^2 = 0$$

$$x_0 (2x_1 + x_2 - 3x_0) + \lambda (x_1 - 2x_2 + x_0)^2 = 0$$

$$2x + y - 3 + \lambda (x - 2y + 1)^2 = 0$$

Rimane da imporre la tangenza ad δ: $x = -1$: $x + 1 = 0$

$x_1 + x_0 = 0$

Poniamo $x = -1$; sostituendo i

$$-2 + y - 3 + \lambda (\cancel{-1} - 2y \cancel{+1})^2 = 0$$

$$y - 5 + 4\lambda y^2 = 0 \qquad 4\lambda y^2 + y - 5 = 0$$

Vogliamo una radice doppia: $\Delta = 0$ $\qquad 1 + \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 5}_{80} \lambda = 0$

$$1 + 80\lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{1}{80}}$$

$$-\frac{1}{20} y^2 + y - 5 = 0$$

$$y^2 - 20y + 100 = 0$$

$$(y - 10)^2 = 0$$

$$y = 10$$

doppia

$\boxed{P : (-1, 10)}$

Eq: $$\overbrace{2x + y - 3}^{X} - \frac{1}{80} (\overbrace{x - 2y + 1}^{Y})^2 = 0$$

$$160x + 80y - 240 - (x - 2y + 1)^2 = 0$$

$$(x - 2y + 1)^2 - 160x - 80y + 240 = 0$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 1 + 2x - 4y - 160x - 80y + 240 = 0$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 158x - 84y + 241 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 241 & -79 & -42 \\ -79 & 1 & -2 \\ -42 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo p

(1) Poniamo

$$X' = \frac{2x}{\sqrt5} + \frac{y}{\sqrt5} - \frac{3}{\sqrt5} = \frac{1}{\sqrt5} X \qquad X = \sqrt5 X'$$

$$Y' = \frac{x}{\sqrt5} - \frac{2y}{\sqrt5} + \frac{1}{\sqrt5} = \frac{1}{\sqrt5} Y \qquad Y = \sqrt5 Y'$$

$(x,y) \to (X',Y')$
camb. di riferimento

Si ha
$$\sqrt5 X' - \frac{1}{80}(\sqrt5 Y')^2 = 0$$

$$\sqrt5 X' - \frac{5}{80} Y'^2 = 0$$

$$X' - \frac{\sqrt5}{80} Y'^2 = 0 \qquad \frac{\sqrt5}{16\cdot 5} = \frac{1}{16\sqrt5}$$

$$X' - \frac{1}{16\sqrt5} Y'^2 = 0$$

$$Y'^2 = 2pX'$$

$$2p = 16\sqrt5 \Rightarrow \boxed{p = 8\sqrt5}$$

$$\frac{p}{2} = 4\sqrt5$$

Si ha allora, per ragioni geometriche:

$$F = V + \frac{p}{2} u \qquad u = \left(\frac{2}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}\right)$$

$$F = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 4\sqrt5 \begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\5\end{pmatrix}$$

$F: (9, 5)$

② controllo col metodo degli invarianti ortogonali

$$p = \sqrt{-\frac{\mathcal{A}}{\gamma^3}} \qquad \gamma = 1+4 = 5 \qquad \gamma^3 = 5^3$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \cancel{241\cdot 4} - 2\cdot 79\cdot 2\cdot 42 - 42^2 - \cancel{241\cdot 4} - 4\cdot 79^2 \\
&= -4\cdot 42\cdot 79 - 42^2 - 4\cdot 79^2 \\
&= -\left((2\cdot 79)^2 + 42^2 + 2(2\cdot 79)\cdot 42 \right) \\
&= -(42 + 2\cdot 79)^2 \\
&= -(200)^2 = -4\cdot 10^4
\end{aligned}$$

$$79\cdot 2 = 158 + 42 = 200$$

$$p = \sqrt{\frac{4\cdot 10^4}{5^3}} = \sqrt{\frac{4\cdot 2^4\cdot 5^4}{5^3}} = 2\cdot 2^2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$$ ✓

δ: retta per H, simmetrico di F risp. a V, $\perp$ ad a ($\parallel r$)

$$H = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\delta:\quad y+3 = (-2)(x+7) \qquad y+3 = -2x-14$$

$$\boxed{\delta:\ 2x + y + 17 = 0}$$

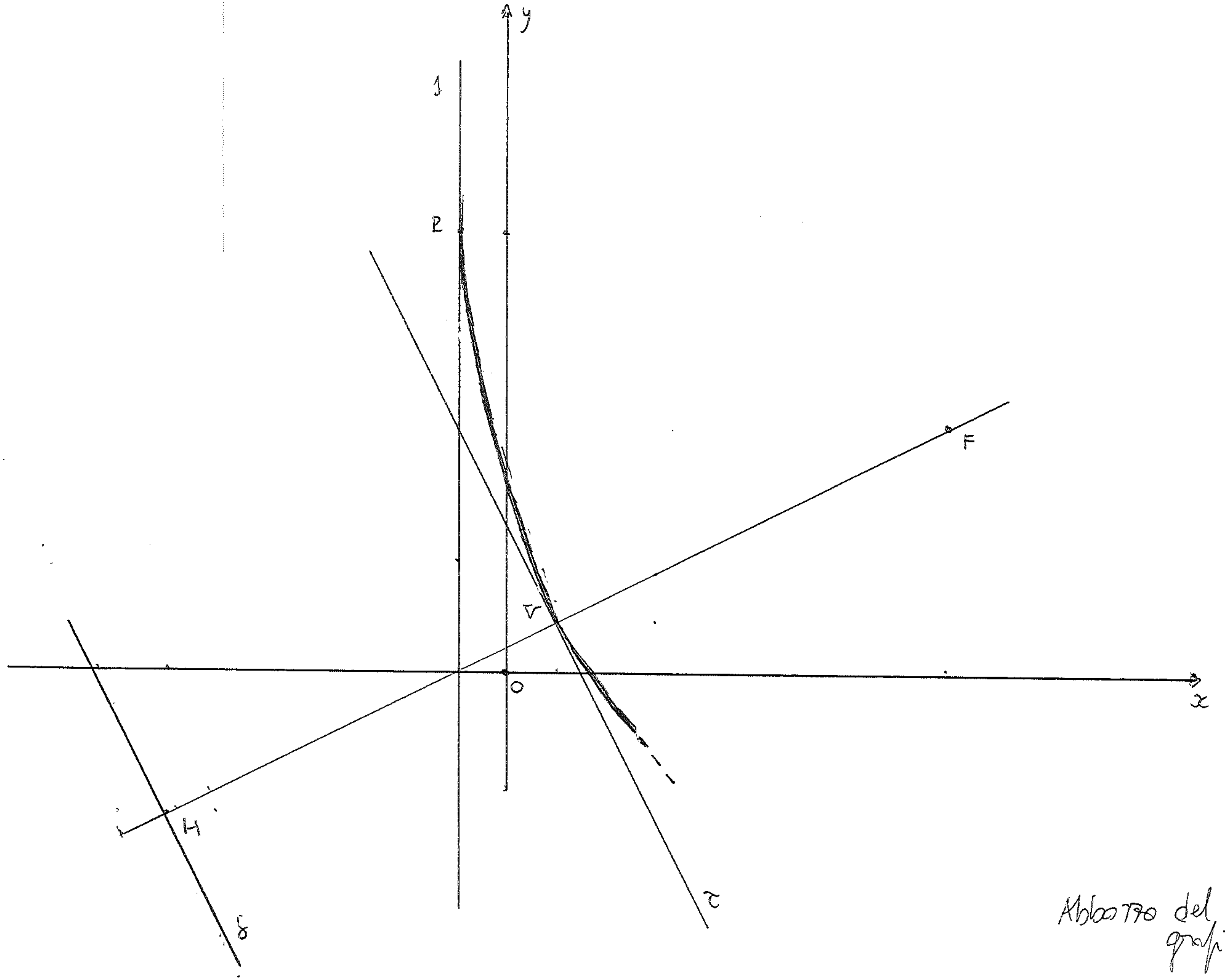
oppure: polare di F

$$(x_0\ x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 241 & -79 & -42 \\ -79 & 1 & -2 \\ -42 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0\ x_1\ x_2)\begin{pmatrix} \overbrace{241 - 79\cdot 9 - 42\cdot 5}^{-680} \\ \underbrace{-79 + 9 - 10}_{-80} \\ \underbrace{-42 - 18 + 20}_{-40} \end{pmatrix} = 0$$

79
9
711
210
921
241
680

$$\sim 17x_0 + 2x_1 + x_2 = 0$$ ✓



Abbozzo del grafico