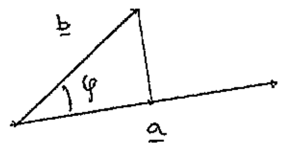
ELEMENTI DI GEOMETRIA Prof. M. Spera Addendum I - 2009/10

◇ Il prodotto scalare elementare

Per motivare adeguatamente gli sviluppi successivi, ricordiamo la nozione di prodotto scalare di due vettori (ponendoci dapprima nel piano) in termini elementari e riformuliamola, in modo da generalizzarla



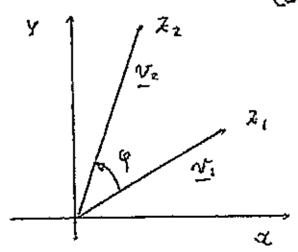
$a = \|\underline{a}\|$ ← lunghezza
$b = \|\underline{b}\|$

$$\langle \underline{a} \mid \underline{b} \rangle := a \cdot b \cos\varphi$$

Vale anche nello spazio

prodotto scalare di due vettori (pensiamoli applicati nello stesso punto.)

(Si noti che il passaggio da φ a $-\varphi$ non altera il prodotto scalare, sicché φ può essere considerato non orientato)



Chiamando in causa il formalismo complesso, troviamo subito

$$\langle \underline{v}_2 \mid \underline{v}_1 \rangle = |z_2||z_1| \cos\varphi = |z_2||z_1| \operatorname{Re} e^{i\varphi} =$$

($\underline{v}_2 = z_2$, $\underline{v}_1 = z_1$)

$$= |z_2||z_1| \operatorname{Re}(e^{i\varphi_2} e^{-i\varphi_1}) =$$

$$= \operatorname{Re}\left(|z_2||z_1| e^{i\varphi_2} e^{-i\varphi_1} \right) =$$

$$= \operatorname{Re}\left(z_2 \bar{z}_1 \right) = \quad \left(\text{se } z_j = x_j + i y_j \right) \quad j = 1,2$$

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 ,$$

Se $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$, e pure

$$\cos\varphi = \frac{\langle \underline{v}_2 \mid \underline{v}_1 \rangle}{\|\underline{v}_2\| \|\underline{v}_1\|} \quad \left(= \frac{\langle v_1 | v_2 \rangle}{\|v_1\| \|v_2\|} \right)$$

Si noti che dal prodotto scalare si può risalire subito alla lunghezza: $\|\underline{v}\| = \langle \underline{v} | \underline{v} \rangle^{\frac{1}{2}}$

$(= x^2 + y^2)$

lunghezza introdotta tramite la geom. classica

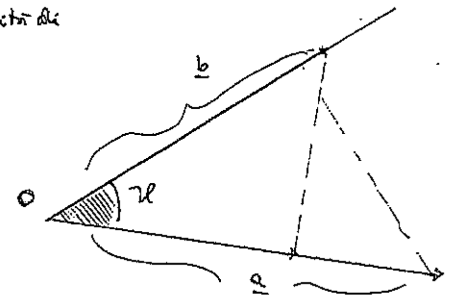
- Procediamo anche in altro modo, direttamente nello spazio,

Consideriamo il prodotto scalare elementare

$$\langle \underline{a} \mid \underline{b} \rangle := \|\underline{a}\| \, \|\underline{b}\| \cos \vartheta$$

(ϑ non orientato)

fissata una unità di misura



interpretabile come prodotto della lunghezza di uno dei vettori per la lunghezza della proiezione dell'altro sulla retta che questo (se non nullo) individua, con segno opportuno...

|| È chiaro che, per ragioni geometriche, sussistono le proprietà di ...

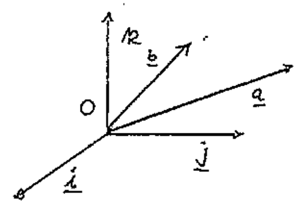
- simmetria : $\langle \underline{a} \mid \underline{b} \rangle = \langle \underline{b} \mid \underline{a} \rangle$
- linearità : (nel primo argomento) $\langle \alpha \underline{a}_1 + \beta \underline{a}_2 \mid \underline{b} \rangle = \alpha \langle \underline{a}_1 \mid \underline{b} \rangle + \beta \langle \underline{a}_2 \mid \underline{b} \rangle$

e, dunque, di bilinearità (linearità in entrambi gli argomenti)

È chiaro che $\langle \underline{a} \mid \underline{b} \rangle = 0 \iff \underline{a}$ e $\underline{b}$ sono perpendicolari nel senso usuale (della geometria elementare)

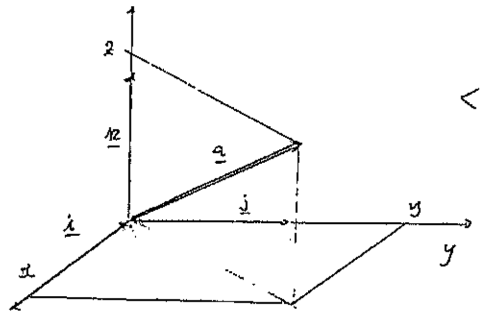
$\|\underline{a}\| = \sqrt{\langle a \mid a \rangle}$..

lunghezza di a



Data ora una terna di versori ($\underline{i}$ $\underline{j}$. $\underline{k}$) mutuamente perpendicolari (base per $\mathcal{S}_O \cong \mathbb{S}$) (spiccati da un'origine prefissata) [base ortonormale]

e posto
$$\underline{a} = x \underline{i} + y \underline{j} + z \underline{k}$$
$$\underline{b} = x' \underline{i} + y' \underline{j} + z' \underline{k}'$$



si ha

$\langle \underline{a} \mid \underline{b} \rangle =$ (usando la bilinearità e la simmetria e la perpendicolarità di due versori distinti)

$$= \langle x \underline{i} + y \underline{j} + z \underline{k} \mid x' \underline{i} + y \underline{j} + z \underline{k} \rangle =$$

$$= x x' \underbrace{\langle \underline{i} \mid \underline{i} \rangle}_{=1} + y x' \underbrace{\langle \underline{j} \mid \underline{i} \rangle}_{=0} + z x' \underbrace{\langle \underline{k} \mid \underline{i} \rangle}_{=0} +$$

$$+ y y' \underbrace{\langle \underline{j} \mid \underline{j} \rangle}_{=1} + x y' \underbrace{\langle \underline{i} \mid \underline{j} \rangle}_{=0} + z y \underbrace{\langle \underline{k} \mid \underline{j} \rangle}_{=0}$$

$$+ z z' \underbrace{\langle \underline{k} \mid \underline{k} \rangle}_{=1} + x z \underbrace{\langle \underline{i} \mid \underline{k} \rangle}_{=0} + y z \underbrace{\langle \underline{j} \mid \underline{k} \rangle}_{=0}$$

$$= x x' + y y' + z z'$$

$$\boxed{\langle \underline{a} \mid \underline{b} \rangle = x x' + y y' + z z'}$$

ovviamente, se $z = z' = 0$ ritroviamo il prodotto scalare di due vettori nel piano

Si ha pure

$$\langle \underline{a} | \underline{a} \rangle = \| \underline{a} \|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

(teorema di Pitagora nello spazio)

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ è il prototipo di <u>forma</u> <u>bilineare</u> bilineare simmetrica, e la norma corrispondente è un esempio di <u>forma quadratica</u>

[dall'una si può risalire all'altra, e viceversa:

si osservi infatti che ora

$$\| \underline{a} + \underline{b} \|^2 = \| \underline{a} \|^2 + \| \underline{b} \|^2 + 2 \langle \underline{a} | \underline{b} \rangle$$

$$\| \underline{a} - \underline{b} \|^2 = \| \underline{a} \|^2 + \| \underline{b} \|^2 - 2 \langle \underline{a} | \underline{b} \rangle$$

si ha subito

$$4 \langle \underline{a} | \underline{b} \rangle = \| \underline{a} + \underline{b} \|^2 - \| \underline{a} - \underline{b} \|^2$$

ovvero

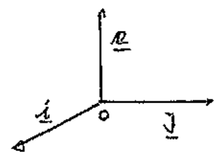
$$\langle \underline{a} | \underline{b} \rangle = \frac{1}{4} \left(\| \underline{a} + \underline{b} \|^2 - \| \underline{a} - \underline{b} \|^2 \right) \Big]$$

Si noti che, da $\langle \ | \ \rangle$ (semplicissimo se si conoscono le componenti di $\underline{a}$ e $\underline{b}$, si ricava l'angolo ϑ (o meglio, il suo coseno.) (se $\underline{a} \neq \underline{0}$, $\underline{b} \neq \underline{0}$)

$$\cos \vartheta = \frac{\langle \underline{a} | \underline{b} \rangle}{\| \underline{a} \| \cdot \| \underline{b} \|}$$

◇ <u>Il</u> <u>prodotto</u> <u>vettoriale</u>

Poniamoci in $\mathbb{S}$, spazio vettoriale geometrico, con la nozione di ortogonalità definita in modo classico. Sia $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ una base <u>ortonormale</u> <u>fissata</u> (essa definisce un <u>orientamento</u> in modo naturale.



pensiamo i vettori applicati in uno stesso punto O

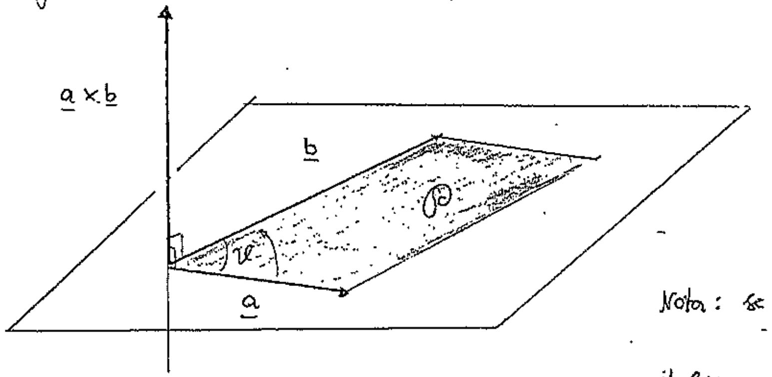
Consideriamo $\underline{a}$, $\underline{b}$, vettori geometrici <u>indipendenti</u>, per fissare le idee (in particolare, non sono nulli)

Definiamo

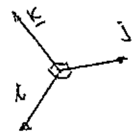
$\underline{a} \times \underline{b}$: prodotto vettoriale di $\underline{a}$ e $\underline{b}$ (nell'ordine dato)

è un vettore <u>perpendicolare</u> ad entrambi, con <u>verso</u> scelto in modo che (la <u>base</u>) $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b})$ definisca lo stesso orientamento di $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$

e con <u>modulo</u> pari all'<u>area</u> <u>del</u> <u>parallelogramma</u> formato da $\underline{a}$ e $\underline{b}$,



Nota: se $\underline{a} = 0$ o $\underline{b} = 0$ il loro prodotto vettoriale è definito (coerentemente) $= \underline{0}$



$$A(\mathcal{P}) = \|\underline{a}\|\|\underline{b}\|\,|\sin\theta| = \ldots = \sqrt{\|\underline{a}\|^2\|\underline{b}\|^2 - \langle \underline{a}|\underline{b}\rangle^2}$$

prodotto scalare definito per via geometrica

Dunque

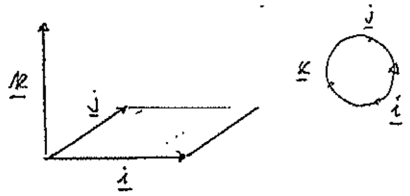
$\underline{a} \times \underline{b}$ è un <u>vettore</u> rappresentante un'<u>area</u> <u>orientata</u>

osserviamo che, in particolare

$\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}$

$\underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}$

$\underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$



Dalla definizione è subito

$\underline{b} \times \underline{a} = -\underline{a} \times \underline{b}$ antisimmetria

$\Rightarrow \quad \underline{a} \times \underline{a} = \underline{0}$

$\alpha(\underline{a} \times \underline{b}) = \alpha\underline{a} \times \underline{b} = \underline{a} \times \alpha\underline{b}$ omogeneità

Si ha poi

$\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}$ (distributiva)

di semplice verifica (se si ricorre all'interpretazione geometrica)

Si noti che l'espressione

$$\underline{a} \times \underline{b} \times \underline{c}$$

* <u>non ha senso in generale</u>!

Infatti non vale la proprietà associativa: es:

$(\underline{i} \times \underline{j}) \times \underline{j} = \underline{k} \times \underline{j} = -\underline{i}$

$\underline{i} \times (\underline{j} \times \underline{j}) = -\ \underline{i} \times \underline{0} = \underline{0}$

★ Osserviamo (Cf. anche i casi particolari visti precedentemente) che, per ragioni geometriche, le componenti di $\underline{a} \times \underline{b}$ rispetto a $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$,

saranno le aree orientate di parallelogrammi ottenuti proiettando il parallelogramma individuato da $\underline{a} \times \underline{b}$ sui piani perpendicolari ai rispettivi versori (ossia $\underset{\underline{i}}{yz}$, $\underset{\underline{j}}{zx}$, $\underset{\underline{k}}{xy}$)

Ma queste aree si possono esprimere come determinanti 2×2 (Cf. la discussione iniziale sui determinanti

Formalmente, $\underline{a} \times \underline{b}$ si può ottenere sviluppando formalmente il "determinante"

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

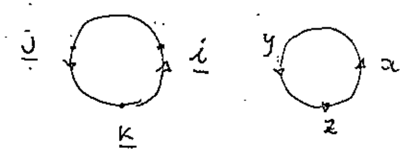
tramite lo sviluppo di Laplace rispetto alla prima riga

$$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \underline{j} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

1 2 3   2 3 1   3 1 2

Dunque, il prodotto vettoriale rappresenta un'area orientata nello spazio (vista come vettore)

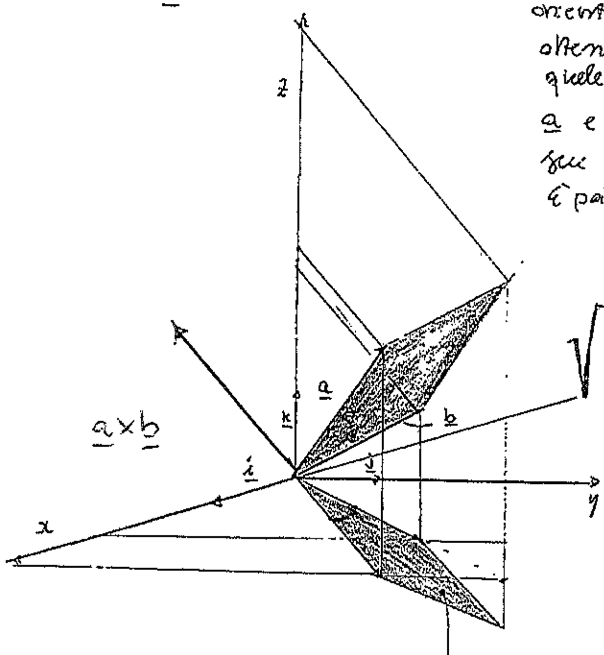
$$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \underline{j} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$



Sono a loro volta aree orientate di parallelogrammi ottenuti proiettando quello determinato da $\underline{a}$ e $\underline{b}$ sui piani coordinati

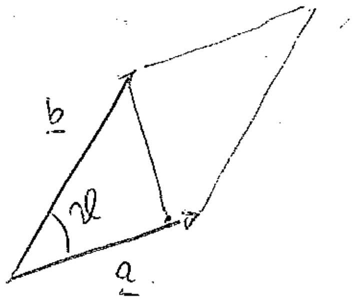
È poi

$$\|\underline{a} \times \underline{b}\| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}$$



$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\underline{a} = (x_1, y_1) \qquad A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$
$$\underline{b} = (x_2, y_2)$$



$$t = \|\underline{a}\|\|\underline{b}\| \cdot |\sin\vartheta| = \ldots$$
$$= \sqrt{\|\underline{a}\|^2\|\underline{b}\|^2 - \langle \underline{a}\,\underline{b}\rangle^2}$$

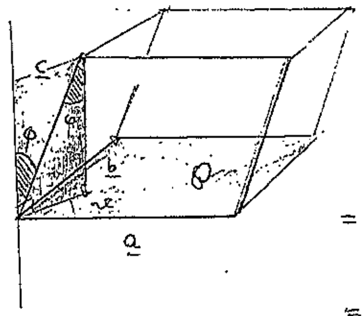
$$t^2 = (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) - (x_1x_2+y_1y_2)^2$$
$$= \cancel{x_1^2x_2^2} + x_2^2y_1^2 + x_1^2y_2^2 + \cancel{y_1^2y_2^2}$$
$$- \cancel{x_1^2x_2^2} - \cancel{y_1^2y_2^2} - 2\, x_1x_2y_1y_2$$
$$= x_2^2y_1^2 + x_1^2y_2^2 - 2(x_1y_2)\cdot(x_2y_1)$$
$$= (x_1y_2 - x_2y_1)^2$$

$$\Rightarrow \quad t = \left|\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right| = |\det A|$$

Osserviamo che, dato $\underline{c} \in \mathbb{S}$ arbitrario, il prodotto misto

$$< \underline{c} \mid \underline{a} \times \underline{b} > = < \underline{a} \times \underline{b} \mid \underline{c} >$$

dà il volume orientato del parallelepipedo determinato da $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$.



volume orientato

$$= \underset{\text{area orientata}}{A(P)} \cdot \|\underline{c}\| \cos\varphi$$

$$= \|\underline{a} \times \underline{b}\| \|\underline{c}\| \cos\varphi$$

$$= < \underline{a} \times \underline{b} \mid \underline{c} >$$

Osserviamo che $\times$ dipende da $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ solo attraverso l'orientamento indotto da quest'ultima.

☆ ∴ Tale volume orientato deve risultare ∴ uguale a

$$\det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$$

pensiamoli, per esempio, come righe (componenti dei vettori dati rispetto a $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$)

come avevamo preannunciato

Infatti

$$< \underline{a} \times \underline{b} \mid \underline{c} > = < \underline{c} \mid \underline{a} \times \underline{b} >$$

$$= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

[Sviluppo di Laplace]

Da tale espressione, ∴ le varie proprietà del prodotto vettoriale (in particolare la distributiva) si recuperano attraverso quelle del determinante

per esempio:

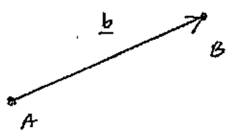
$$<(\underline{a}_1 + \underline{a}_2) \times \underline{b} \mid \underline{c} > =$$

$$\therefore \det(\underline{a}_1 + \underline{a}_2, \underline{b}, \underline{c}) = \det(\underline{a}_1, \underline{b}, \underline{c}) + \det(\underline{a}_2, \underline{b}, \underline{c}) = <a_1 \times \underline{b} \mid c> + <a_2 \times \underline{b} \mid c>$$

$\forall\, \underline{c}$, e pertanto

$$(\underline{a}_1 + \underline{a}_2) \times \underline{b} = \underline{a}_1 \times \underline{b} + \underline{a}_2 \times \underline{b}$$

- lunghezza di un segmento (nello spazio)

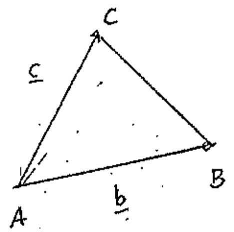


$$\underline{b} = B - A$$

$$\|\underline{b}\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

⚠ "lunghezza orientata": è il vettore $\underline{b}$ stesso

- Area di un triangolo $\mathcal{T}$ (nello spazio)



Posto, per es.

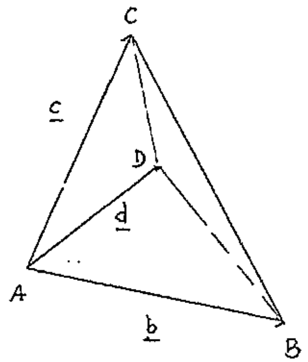
$B - A = \underline{b}$
$C - A = \underline{c}$

(A vertice qualsiasi)

è $\quad A(\mathcal{T}) = \frac{1}{2}\|\underline{b} \times \underline{c}\|$

⚠ area orientata $= \frac{1}{2}\, \underline{b} \times \underline{c}$: è un vettore!!!
stessa cosa per un parallelogramma (manca il fattore $\frac{1}{2}$)

- Volume di un tetraedro T



(A, vertice qualsiasi)

$\underline{b} = B - A$
$\underline{c} = C - A$
$\underline{d} = D - A$

$\Downarrow$ (*)

$$V(T) = \frac{1}{6}\left|\det(\underline{b}, \underline{c}, \underline{d})\right|$$

(non orientato)

per il parallelepipedo manca il fattore $\frac{1}{6}$

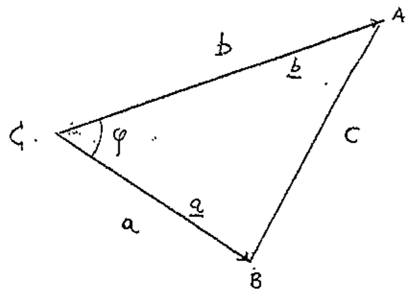
volume orientato:
$\frac{1}{6}\det(\underline{b}, \underline{c}, \underline{d})$

(*) : perchè ??

$\boxed{\text{INCISO}}$

Formula di Erone I sec d.C

(probabilmente dovuta ad Archimede, III sec. a.C.)



$\mathcal{A}$ area del triangolo ABC

s = semiperimetro = $\frac{a+b+c}{2}$

a, b, c lunghezze dei lati

$$\mathcal{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Notare che $s-a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{a+b+c-2a}{2} = \frac{b+c-a}{2}$ ecc.

Dim. Osserviamo che $2\mathcal{A} = ab\,|\sin\varphi| =$

$= ab\sqrt{1-\cos^2\varphi} = a \cdot b \cdot \sqrt{1 - \frac{\langle \underline{a} | \underline{b} \rangle^2}{a^2 b^2}}$

$= \sqrt{a^2b^2 - \langle \underline{a} | \underline{b} \rangle^2} \equiv \sqrt{\|\underline{a}\|^2\|\underline{b}\|^2 - \langle \underline{a} | \underline{b} \rangle^2}$

ovvero $4\mathcal{A}^2 = a^2 \cdot b^2 - \langle \underline{a} | \underline{b} \rangle^2$

ma (identità di polarizzazione)

$- \langle \underline{a} | \underline{b} \rangle = \frac{1}{2}\left(\|\underline{a} - \underline{b}\|^2 - \|\underline{a}\|^2 - \|\underline{b}\|^2 \right)$

$= \frac{1}{2}\left(c^2 - a^2 - b^2 \right)$

$\langle \underline{a} | \underline{b} \rangle = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$

$\langle \underline{a} | \underline{b} \rangle^2 = \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4}$

$\Rightarrow$

$4\mathcal{A}^2 = a^2b^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4} =$

$= \frac{4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2}{4} =$

$= \frac{(2ab - a^2 - b^2 + c^2)(2ab + a^2 + b^2 - c^2)}{4}$

$= \frac{[c^2 - (a-b)^2][(a+b)^2 - c^2]}{4} =$

$= \frac{(\overbrace{c+a-b}^{2(s-b)})(\overbrace{c-a+b}^{2(s-a)})(\overbrace{a+b-c}^{2(s-c)})(\overbrace{a+b+c}^{2s})}{4}$

$\Rightarrow \mathcal{A}^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$,

da cui la conclusione.