

Capitolo 1

Modello di un manipolatore planare a tre link

1.1 Introduzione

In queste dispense viene presentato il modello di un manipolatore planare a tre link con giunti rotativi. Per arrivare alla sua formulazione ci si è basati sulle proprietà di linearità ed anti-commutatività del prodotto vettoriale.

1.2 Notazione

1.2.1 Stili

Per distinguere tra grandezze vettoriali e scalari, verranno utilizzati i seguenti stili:

- \mathbf{v} indica un vettore;
- \mathbf{v}_i indica un secondo vettore diverso da \mathbf{v} ;
- $v, \|\mathbf{v}\|$ indicano il modulo del vettore \mathbf{v} ;
- $v_i, \|\mathbf{v}_i\|$ indicano il modulo del vettore \mathbf{v}_i ;
- $\dot{\mathbf{v}}$ indica la derivata del vettore \mathbf{v} nel tempo;
- $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}$ indicano una scomposizione del vettore \mathbf{v} , del tipo $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(2)}$;
- \mathbf{A} indica una matrice;
- A_{ij} indica l'elemento di \mathbf{A} in posizione (i, j) .

1.2.2 Variabili

Con riferimento alla figura 1.1, le grandezze rappresentate possiedono il seguente significato:

- m_i rappresenta la massa del braccio i ;

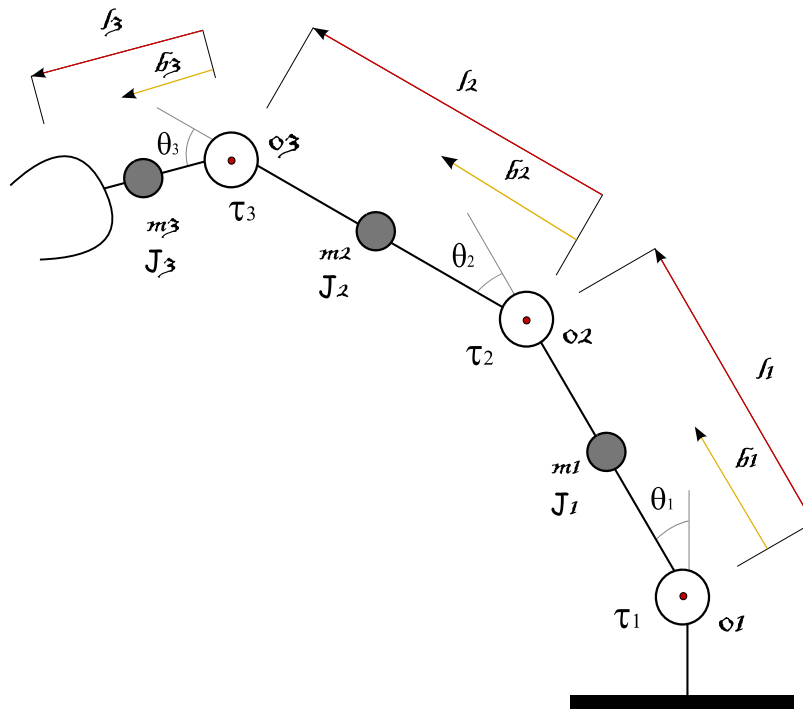


Figura 1.1: Manipolatore planare a tre link.

- J_i rappresenta il momento d'inerzia del braccio i ;
- θ_i rappresenta la posizione angolare del giunto i ;
- o_i rappresenta il centro di rotazione del giunto i ;
- l_i rappresenta il vettore che congiunge o_i ad o_{i+1} ;
- b_i rappresenta il vettore che congiunge o_i al centro di massa dell' i -esimo braccio;
- τ_i rappresenta la coppia sviluppata dal motore i - esimo, proporzionale alla relativa corrente elettrica.

Chiameremo \mathbf{q} il vettore delle posizioni angolari. Esso rappresenta la posizione del manipolatore nel cosiddetto spazio dei giunti.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

Chiameremo $\boldsymbol{\tau}$ il vettore che rappresenta i moduli delle tre coppie in ingresso ai motori.

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}$$

1.3 Struttura del modello

Il manipolatore è rappresentato schematicamente in figura 1.1, dove è stata trascurata la presenza dei motori, le cui inerzie si considerano incluse in quelle dei bracci. Le forze che partecipano alla dinamica di tale manipolatore sono:

1. **Forza di gravità:** dipende solo dalla posizione angolare dei tre giunti. Le coppie che questa forza genera sui giunti sono raccolte nel vettore $\mathbf{g}(\mathbf{q})$.
2. **Forza centripeta:** dipende dalle velocità angolari e anche dalle posizioni, le quali possono fare variare i raggi di rotazione. Le coppie ai giunti dovute alle forze centripete verranno raccolte nella matrice $\mathbf{C}_e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$.
3. **Forza di Coriolis:** si instaura quando un corpo si muove (radialmente) in un sistema in rotazione, dipende dalle velocità e anche dalle posizioni angolari dei giunti. Le coppie ai giunti verranno raccolte nella matrice $\mathbf{C}_o(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$.
4. **Attrito Coulombiano o dinamico:** è dovuto al contatto tra superfici ed ha lo stesso segno della direzione del moto. La coppia ai giunti è quantificabile come $\mathbf{F}_d \text{sign}(\dot{\mathbf{q}})$.
5. **Attrito viscoso:** è dovuto alla presenza di lubrificante nei cuscinetti ed è proporzionale alla velocità del moto. Genera la coppia $\mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}}$.
6. **Coppia motore**, che chiamiamo $\boldsymbol{\tau}$: è proporzionale alla corrente elettrica che attraversa le armature dei motori.

In virtù della seconda legge di Newton in forma angolare è possibile scrivere:

$$\boldsymbol{\tau}_{tot} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} \quad (1.1)$$

dove $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ è la matrice delle inerzie che consente di esprimere la coppia generata su ciascun giunto in seguito all'accelerazione di un angolo di un giunto qualsiasi. Infatti $\boldsymbol{\tau}_{tot}$ è il vettore che rappresenta i moduli delle coppie risultanti agenti sui tre giunti. Esse sono date dalle coppie sviluppate dai motori a cui vanno sottratte le componenti dovute alle forze descritte sopra:

$$\boldsymbol{\tau}_{tot} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{F}_d \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} \quad (1.2)$$

dove le forze centrifughe e di Coriolis sono state riunite opportunamente - sarà chiarito in seguito - nella matrice $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Esplicitando il vettore delle coppie totali è possibile scrivere il modello nella seguente forma:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{F}_d \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} \quad (1.3)$$

I prossimi paragrafi sono dedicati al calcolo delle varie componenti della 1.3. Per ogni componente viene riportato un esempio semplificato ed in seguito le espressioni relative al manipolatore a tre link di figura 1.1.

1.4 La matrice delle inerzie

La matrice $\mathbf{B}(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$, stabilisce la relazione tra le tre coppie motore e le accelerazioni ai tre giunti in virtù della seconda legge di Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (1.4)$$

In particolare, per movimenti rotazionali di un corpo puntiforme di massa m intorno ad un centro \mathbf{o} , è possibile scrivere

$$\mathbf{l} \times \mathbf{F} = \mathbf{l} \times m\mathbf{a} \quad (1.5)$$

dove $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{l} \times \mathbf{F}$ rappresenta la coppia per imprimere al corpo un'accelerazione tangenziale istantanea \mathbf{a} . La quantità \mathbf{l} rappresenta infatti il braccio della forza, la distanza tra \mathbf{o} ed il centro di massa del corpo. Se si considera però il caso più realistico di massa distribuita, è necessario, secondo il teorema di Steiner, considerare anche l'inerzia J . La 1.5 diventa:

$$\mathbf{l} \times \mathbf{F} = \mathbf{l} \times m\mathbf{a} + J\boldsymbol{\alpha} \quad (1.6)$$

Solitamente, nei bracci meccanici, accade che l'accelerazione tangenziale \mathbf{a} non è misurabile, mentre è nota l'accelerazione angolare $\boldsymbol{\alpha}$. Il legame tra le due è dato da:

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}, \quad (1.7)$$

e l'equazione 1.6 si può riscrivere in funzione solo di $\boldsymbol{\alpha}$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{l} \times \mathbf{F} = \mathbf{l} \times m(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) + J\boldsymbol{\alpha} \quad (1.8)$$

Inoltre \mathbf{l} e \mathbf{r} sono generalmente funzioni delle posizioni angolari. Per mostrare ciò consideriamo un caso di struttura semplificato, mostrato in figura 1.2, si osserva che \mathbf{l} è dato da:

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 \quad (1.9)$$

$$l = \mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2) \cdot (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2) = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \sin \theta_1 \quad (1.10)$$

mentre \mathbf{r} risulta

$$\mathbf{r} = \mathbf{l} \quad (1.11)$$

Considerando queste espressioni la 1.6 è esprimibile come

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{l} \times \mathbf{F} = (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2) \times m(\boldsymbol{\alpha} \times (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_1)) + J\boldsymbol{\alpha} \quad (1.12)$$

che si può sviluppare grazie alla linearità ed alla anti-commutatività del prodotto vettoriale in

$$\boldsymbol{\tau} = m[(\mathbf{l}_1 \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{l}_1)) + (\mathbf{l}_2 \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{l}_1)) + (\mathbf{l}_1 \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{l}_2)) + (\mathbf{l}_2 \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{l}_2))] + J\boldsymbol{\alpha} \quad (1.13)$$

dalla quale, sviluppando i prodotti vettoriali, è relativamente semplice calcolare il modulo della coppia

$$\tau = (ml_1^2 + ml_2^2 + 2ml_1l_2 \cos \theta + J)\alpha \quad (1.14)$$

Ogni elemento della matrice $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ descrive la quantità tra parentesi nella 1.14 per particolari valori di $\boldsymbol{\alpha}$, \mathbf{r} e di \mathbf{l} . In particolare le tre righe si riferiscono rispettivamente alle coppie sui tre motori. Ogni colonna invece, in virtù della linearità della 1.8 rispetto ad $\boldsymbol{\alpha}$, descrive l'accelerazione corrispondente al movimento di un solo giunto.

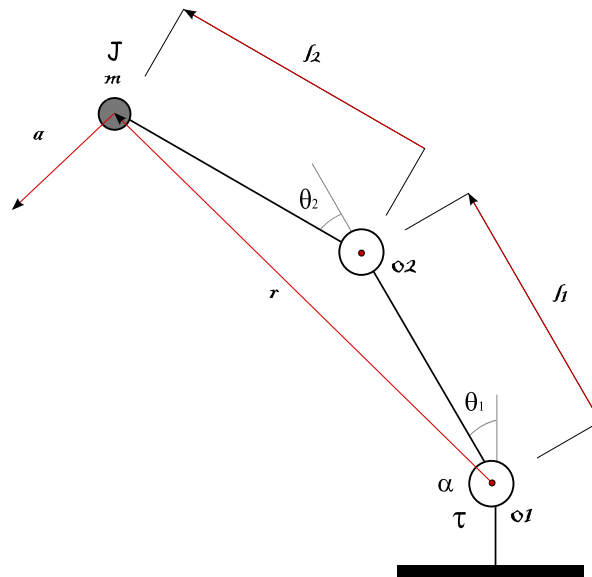


Figura 1.2: Caso esemplificativo: inerzia dovuta ad una singola massa in un manipolatore a due link.

1.4.1 Colonna $B_{\cdot 1}(\mathbf{q})$

La prima colonna di $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ descrive la coppia che i tre motori devono sviluppare, sulla struttura a tre link di figura 1.1, per produrre un'accelerazione angolare pari a

$$\ddot{\mathbf{q}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

Gli elementi B_{11} , B_{21} e B_{31} , descrivono la coppia ai tre motori necessaria ad imprimere al sistema tali accelerazioni angolari. Essi dipendono dai bracci della forza \mathbf{l} visti da ognuno dei tre motori per ognuna delle tre masse, tenendo presente che ogni motore è responsabile solo delle accelerazioni dei corpi a valle della catena cinematica. Inoltre essi dipendono dalle accelerazioni $\ddot{\mathbf{q}}^{(1)}$ e dai raggi di rotazione \mathbf{r} . Questi ultimi sono invarianti per ogni colonna di $\mathbf{B}(\mathbf{q})$, per la prima essi valgono:

$\mathbf{r} = \mathbf{b}_1$ è il raggio di rotazione di m_1 ;

$\mathbf{r} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{b}_2$ è il raggio di rotazione di m_2 ;

$\mathbf{r} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3$ è il raggio di rotazione di m_3

Segue lo studio dei singoli elementi.

Elemento B_{11}

Descrive la coppia al primo giunto. Essa è data da tre componenti elementari necessarie per accelerare le masse m_1 , m_2 ed m_3 . Rispetto ad m_1 , il raggio di rotazione \mathbf{r} è pari a \mathbf{b}_1 ed il

braccio della forza \mathbf{l} è identico. Sostituendo nella 1.8 si ottiene

$$\boldsymbol{\tau}^{(m1)} = \mathbf{b}_1 \times m_1(\ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \times \mathbf{b}_1) + J_1 \ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \quad (1.16)$$

$$\tau^{(m1)} = (m_1 b_1^2 + J_1) \ddot{\theta}_1 \quad (1.17)$$

Rispetto ad m_2 , si ha un raggio di rotazione \mathbf{r} , pari a $(\mathbf{l}_1 + \mathbf{b}_2)$ ed un identico braccio della forza. Sostituendo nella 1.8 si ottiene

$$\boldsymbol{\tau}^{(2)} = (\mathbf{l}_1 + \mathbf{b}_2) \times m_2(\ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \times (\mathbf{l}_1 + \mathbf{b}_2)) + J_2 \ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \quad (1.18)$$

$$\tau^{(2)} = (m_2 l_1^2 + m_2 b_2^2 + m_2 l_1 b_2 \cos \theta_2 + J_2) \ddot{\theta}_1 \quad (1.19)$$

Rispetto ad m_3 $\mathbf{r} = \mathbf{l} = (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3)$.

Sostituendo nella 1.8 si ottiene

$$\boldsymbol{\tau}^{(m3)} = (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3) \times m_3(\ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \times (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3)) + J_3 \ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \quad (1.20)$$

$$\tau^{(m3)} = [m_3 l_1^2 + m_3 l_2^2 + m_3 b_3^2 + 2m_3 l_1 b_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + \quad (1.21)$$

$$2m_3 l_1 l_2 \cos \theta_2 + 2m_3 l_2 b_3 \cos \theta_3 + J_3] \ddot{\theta}_1 \quad (1.22)$$

Aggregando le componenti $\tau^{(i)}$ e raccogliendo $\ddot{\theta}_1$, si ricava l'elemento (1,1) della matrice $\mathbf{B}(\mathbf{q})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{11}(\mathbf{q}) = & m_1 b_1^2 + J_1 + m_2 l_1^2 + m_2 b_2^2 + m_2 l_1 b_2 \cos \theta_2 + J_2 + m_3 l_1^2 + m_3 l_2^2 + m_3 b_3^2 + \\ & 2m_3 l_1 b_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + 2m_3 l_1 l_2 \cos \theta_2 + 2m_3 l_2 b_3 \cos \theta_3 + J_3 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Elemento \mathbf{B}_{21}

Descrive la coppia al secondo giunto necessaria ad imprimere $\ddot{\mathbf{q}}^{(1)}$. Essa è data da due componenti, in quanto a valle del secondo giunto esistono solo le masse m_2 ed m_3 . Rispetto ad m_2 , il braccio della forza \mathbf{l} è pari a \mathbf{b}_2 , mentre il raggio di rotazione è invariante rispetto al caso precedente, in quanto siamo nella stessa colonna. Sostituendo nella 1.8 si ottiene

$$\boldsymbol{\tau}^{(m2)} = (\mathbf{b}_2) \times m_2(\ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \times (\mathbf{l}_1 + \mathbf{b}_2)) + J_2 \ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \quad (1.24)$$

$$\tau^{(m2)} = (m_2 b_2^2 + m_2 l_1 b_2 \cos \theta_2 + J_2) \ddot{\theta}_1 \quad (1.25)$$

Rispetto ad m_3 si ha $\mathbf{l} = (\mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3)$.

Sostituendo nella 1.8 si ottiene

$$\boldsymbol{\tau}^{(m3)} = (\mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3) \times m_3(\ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \times (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3)) + J_3 \ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \quad (1.26)$$

$$\tau^{(m3)} = [m_3 l_2^2 + m_3 b_3^2 + m_3 l_1 b_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + \quad (1.27)$$

$$m_3 l_1 l_2 \cos \theta_2 + 2m_3 l_2 b_3 \cos \theta_3 + J_3] \ddot{\theta}_1 \quad (1.28)$$

Aggregando le componenti $\tau^{(i)}$ e raccogliendo $\ddot{\theta}_1$, si ricava l'elemento (2,1) della matrice $\mathbf{B}(\mathbf{q})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{21}(\mathbf{q}) = & m_2 b_2^2 + m_2 l_1 b_2 \cos \theta_2 + J_2 + m_3 l_2^2 + m_3 b_3^2 + m_3 l_1 b_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + \\ & m_3 l_1 l_2 \cos \theta_2 + 2m_3 l_2 b_3 \cos \theta_3 + J_3 \end{aligned} \quad (1.29)$$

Elemento B_{31}

Descrive la coppia al terzo giunto necessaria ad imprimere $\ddot{\mathbf{q}}^{(1)}$. Essa è data da una sola componente relativa ad m_3 , in quanto unica massa a valle del giunto. Rispetto ad essa il braccio della forza visto dal terzo giunto è $\mathbf{l} = \mathbf{b}_3$. Sostituendo nella 1.8 si ottiene

$$\boldsymbol{\tau}^{(m3)} = \mathbf{b}_3 \times m_3(\ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \times (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3)) + J_3 \ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \quad (1.30)$$

$$\tau^{(m3)} = [m_3 b_3^2 + m_3 l_1 b_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + m_3 l_2 b_3 \cos \theta_3 + J_3] \ddot{\theta}_1 \quad (1.31)$$

In questo caso, esistendo una sola componente $\boldsymbol{\tau} = \tau^{(3)}$ e raccogliendo $\ddot{\theta}_1$, si ricava l'elemento (3,1) della matrice $\mathbf{B}(\mathbf{q})$:

$$\mathbf{B}_{31}(\mathbf{q}) = m_3 b_3^2 + m_3 l_1 b_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + m_3 l_2 b_3 \cos \theta_3 + J_3 \quad (1.32)$$

1.4.2 Colonna $B_{.2}(\mathbf{q})$

La seconda colonna di $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ descrive la coppia che i tre motori devono sviluppare per ottenere un'accelerazione angolare pari a

$$\ddot{\mathbf{q}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.33)$$

Gli elementi \mathbf{B}_{12} , \mathbf{B}_{22} e \mathbf{B}_{32} , descrivono la coppia ai tre motori necessaria ad imprimere tali accelerazioni angolari. Analogamente ai casi precedenti, essi dipendono dai bracci della forza \mathbf{l} , visti per ognuna delle tre masse, dalle accelerazioni $\ddot{\mathbf{q}}^{(2)}$ e dai raggi di rotazione \mathbf{r} . Nel caso di accelerazioni solo sul secondo giunto, i raggi di rotazione che interessano sono relativi alle sole masse m_2 e m_3 , in quanto il primo braccio, essendo a monte del giunto due, non accelera.

$\mathbf{r} = \mathbf{b}_2$ è il raggio di rotazione di m_2 ;

$\mathbf{r} = \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3$ è il raggio di rotazione di m_3

Segue lo studio dei singoli elementi.

Elemento B_{12}

Descrive la coppia al primo giunto. Essa è data da due componenti in quanto a valle del secondo giunto esistono solo le masse m_2 ed m_3 . Rispetto ad m_2 si ha un braccio della forza $\mathbf{l} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{b}_2$. Sostituendo nella 1.8 si ottiene

$$\boldsymbol{\tau}^{(m2)} = (\mathbf{l}_1 + \mathbf{b}_2) \times m_2(\ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \times \mathbf{b}_2) + J_2 \ddot{\boldsymbol{\theta}}_2 \quad (1.34)$$

$$\tau^{(m2)} = (m_2 b_2^2 + m_2 l_1 b_2 \cos \theta_2 + J_2) \ddot{\theta}_2 \quad (1.35)$$

Rispetto ad m_3 il braccio vale $\mathbf{l} = (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3)$.

Sostituendo nella 1.8 si ottiene

$$\boldsymbol{\tau}^{(m3)} = (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3) \times m_3(\ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \times (\mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3)) + J_3 \ddot{\boldsymbol{\theta}}_2 \quad (1.36)$$

$$\tau^{(m3)} = [m_3 l_2^2 + m_3 b_3^2 + m_3 l_1 b_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + \quad (1.37)$$

$$m_3 l_1 l_2 \cos \theta_2 + 2m_3 l_2 b_3 \cos \theta_3 + J_3] \ddot{\theta}_2 \quad (1.38)$$

Aggregando le componenti $\tau^{(i)}$ e raccogliendo $\ddot{\theta}_2$, si ricava l'elemento (1, 2) della matrice $\mathbf{B}(\mathbf{q})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{12}(\mathbf{q}) = & m_2 b_2^2 + m_2 l_1 b_2 \cos \theta_2 + J_2 + m_3 l_2^2 + m_3 b_3^2 + m_3 l_1 b_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + \\ & + m_3 l_1 l_2 \cos \theta_2 + 2m_3 l_2 b_3 \cos \theta_3 + J_3 \end{aligned} \quad (1.39)$$

Si noti che esso è identico all'elemento \mathbf{B}_{21} , infatti la matrice $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ risulterà simmetrica.

Elemento \mathbf{B}_{22}

Descrive la coppia al secondo giunto necessaria ad imprimere $\ddot{\mathbf{q}}^{(1)}$. Essa è data da due componenti elementari, necessarie per accelerare le masse m_2 ed m_3 . Rispetto ad m_2 il braccio della forza \mathbf{l} è pari a \mathbf{b}_2 , mentre il raggio di rotazione è invariante rispetto al caso precedente e risulta identico. Sostituendo nella 1.8 si ottiene

$$\boldsymbol{\tau}^{(m2)} = (\mathbf{b}_2) \times m_2 (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \times (\mathbf{b}_2)) + J_2 \ddot{\boldsymbol{\theta}}_2 \quad (1.40)$$

$$\tau^{(m2)} = (m_2 b_2^2 + J_2) \ddot{\theta}_2 \quad (1.41)$$

Rispetto ad m_3 il braccio della forza vale $\mathbf{l} = (\mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3)$.

Sostituendo nella 1.8 si ottiene

$$\boldsymbol{\tau}^{(m3)} = (\mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3) \times m_3 (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \times (\mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3)) + J_3 \ddot{\boldsymbol{\theta}}_2 \quad (1.42)$$

$$\tau^{(m3)} = [m_3 l_2^2 + m_3 b_3^2 + 2m_3 l_2 b_3 \cos \theta_3 + J_3] \ddot{\theta}_2 \quad (1.43)$$

Aggregando le componenti $\tau^{(i)}$ e raccogliendo $\ddot{\theta}_2$, si ricava l'elemento (2, 2) della matrice $\mathbf{B}(\mathbf{q})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{22}(\mathbf{q}) = & m_2 b_2^2 + J_2 + m_3 l_2^2 + m_3 b_3^2 + \\ & + 2m_3 l_2 b_3 \cos \theta_3 + J_3 \end{aligned} \quad (1.44)$$

Elemento \mathbf{B}_{32}

Descrive la coppia al terzo giunto necessaria ad imprimere $\ddot{\mathbf{q}}^1$. Essa è data da una sola componente relativa ad m_3 , in quanto unica massa a valle del giunto. Rispetto ad essa il braccio della forza $\mathbf{l} = \mathbf{b}_3$. Sostituendo nella 1.8 si ottiene

$$\boldsymbol{\tau}^{(m3)} = \mathbf{b}_3 \times m_3 (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \times (\mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3)) + J_3 \ddot{\boldsymbol{\theta}}_2 \quad (1.45)$$

$$\tau^{(m3)} = [m_3 b_3^2 + m_3 l_2 b_3 \cos \theta_3 + J_3] \ddot{\theta}_2 \quad (1.46)$$

In questo caso, esiste una sola componente $\boldsymbol{\tau} = \tau^{(3)}$, raccogliendo $\ddot{\theta}_2$, si ricava l'elemento (3, 1) della matrice $\mathbf{B}(\mathbf{q})$:

$$\mathbf{B}_{32}(\mathbf{q}) = m_3 b_3^2 + m_3 l_2 b_3 \cos \theta_3 + J_3 \quad (1.47)$$

1.4.3 Colonna $\mathbf{B}_{.3}(\mathbf{q})$

La terza colonna di $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ descrive la coppia che i tre motori devono sviluppare per ottenere un'accelerazione angolare pari a

$$\ddot{\mathbf{q}}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix}, \quad (1.48)$$

Gli elementi \mathbf{B}_{13} , \mathbf{B}_{23} e \mathbf{B}_{33} , descrivono la coppia ai tre motori necessaria ad imprimere tali accelerazioni angolari. Nel caso di accelerazioni solo sul terzo giunto l'unico raggio di rotazione in gioco è quello relativo a m_3 , in quanto il primo ed il secondo braccio, essendo a monte del giunto tre non accelerano. Tale raggio vale:

$$\mathbf{r} = \mathbf{b}_3$$

Segue lo studio dei singoli elementi.

Elemento \mathbf{B}_{13}

Descrive la coppia al primo giunto. Essa è data dalla componente necessaria per accelerare la massa m_3 . Rispetto ad essa il braccio vale $\mathbf{l} = (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3)$. Sostituendo nella 1.8 si ottiene

$$\boldsymbol{\tau}^{(m3)} = (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3) \times m_3(\ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \times \mathbf{b}_3) + J_3\ddot{\boldsymbol{\theta}}_3 \quad (1.49)$$

$$\tau^{(m3)} = [m_3b_3^2 + m_3l_1b_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + \quad (1.50)$$

$$m_3l_2b_3 \cos \theta_3 + J_3]\ddot{\theta}_3 \quad (1.51)$$

L'elemento (3, 1) della matrice $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ si ricava raccogliendo $\ddot{\theta}_3$ dalla formula precedente:

$$\mathbf{B}_{13}(\mathbf{q}) = m_3b_3^2 + m_3l_1b_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + m_3l_2b_3 \cos \theta_3 + J_3 \quad (1.52)$$

Si noti che esso è identico all'elemento \mathbf{B}_{31} .

Elemento \mathbf{B}_{23}

Descrive la coppia al secondo giunto necessaria ad imprimere $\ddot{\mathbf{q}}^3$. Ancora una volta essa è data da una sola componente, in quanto, a valle del secondo giunto, solo la massa m_3 accelera. Rispetto ad essa il braccio della forza vale $\mathbf{l} = \mathbf{b}_3$. Sostituendo nella 1.8 si ottiene

$$\boldsymbol{\tau}^{(m3)} = (\mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3) \times m_3(\ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \times \mathbf{b}_3) + J_3\ddot{\boldsymbol{\theta}}_3 \quad (1.53)$$

$$\tau^{(m3)} = [m_3b_3^2 + m_3l_2b_3 \cos \theta_3 + J_3]\ddot{\theta}_3 \quad (1.54)$$

Raccogliendo $\ddot{\theta}_3$, si ricava l'elemento (2, 3) della matrice $\mathbf{B}(\mathbf{q})$:

$$\mathbf{B}_{23}(\mathbf{q}) = m_3b_3^2 + m_3l_2b_3 \cos \theta_3 + J_3 \quad (1.55)$$

Si nota che esso è identico all'elemento (3, 2).

Elemento \mathbf{B}_{33}

Descrive la coppia al terzo giunto necessaria ad imprimere un'accelerazione al rispettivo link. Essa è data da una sola componente, relativa ad m_3 , in quanto unica massa a valle del giunto, nonché in accelerazione. Rispetto ad essa il braccio della forza visto dal terzo giunto è $\mathbf{l} = \mathbf{b}_3$. Sostituendo nella 1.8 si ottiene

$$\boldsymbol{\tau}^{(m3)} = b_3 \times m_3(\ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \times (\mathbf{b}_3)) + J_3\ddot{\boldsymbol{\theta}}_3 \quad (1.56)$$

$$\tau^{(m3)} = [m_3b_3^2 + J_3]\ddot{\theta}_3 \quad (1.57)$$

In questo caso, raccogliendo $\ddot{\theta}_3$, si ricava l'elemento (3, 3) della matrice $\mathbf{B}(\mathbf{q})$:

$$\mathbf{B}_{33}(\mathbf{q}) = m_3b_3^2 + J_3 \quad (1.58)$$

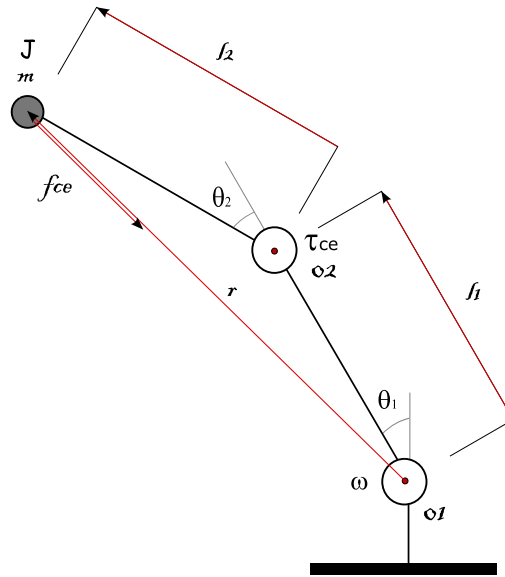


Figura 1.3: Caso esemplificativo: forza centripeta in un manipolatore a due link.

1.5 La forza centripeta

La forza centripeta è quella forza necessaria a mantenere un corpo in moto rotazionale. Per un generico corpo di massa m in moto su di una circonferenza di raggio \mathbf{r} , a velocità $\boldsymbol{\omega}$, essa vale:

$$\mathbf{F}_{ce} = -m\omega^2\mathbf{r} \quad (1.59)$$

Nel caso esemplificativo del manipolatore a due link di figura 1.3, si nota inoltre come il raggio \mathbf{r} possa dipendere dalla posizione dei bracci:

$$\mathbf{r} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 \quad (1.60)$$

Nel nostro modello è necessario quindi esprimere la coppia che un generico giunto deve applicare per generare le forze centripete necessarie ad un determinato movimento. Ancora una volta essa dipende, oltre che da \mathbf{r} e $\boldsymbol{\omega}$, dal braccio \mathbf{l} della forza rispetto al giunto considerato. Si consideri che la forza è applicata nei punti di massa (o nei baricentri nel caso di masse estese). In particolare la coppia impressa dal generico giunto i per ottenere un moto circolare uniforme vale:

$$\boldsymbol{\tau}_{ce}^{(m)} = \mathbf{l} \times \mathbf{F}_{ce} = -m(\mathbf{l} \times \omega^2\mathbf{r}) = m\omega^2(\mathbf{r} \times \mathbf{l}) \quad (1.61)$$

dove \mathbf{l} congiunge il giunto i alla massa m . Tali forze sono rappresentabili tramite una matrice 3×3 secondo una relazione lineare rispetto al quadrato delle velocità. Assunta, senza rigore matematico, la seguente notazione:

$$\dot{\mathbf{q}}^2 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \\ \dot{\theta}_3^2 \end{bmatrix}, \quad (1.62)$$

le forze centripete sono rappresentabili come

$$\boldsymbol{\tau}_{ce} = \mathbf{C}_e(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}^2, \quad (1.63)$$

dove ogni riga di $\mathbf{C}_e(\mathbf{q})$ descrive la coppia applicata al rispettivo giunto. D'altra parte, ogni colonna, grazie alla linearità rispetto a $\dot{\mathbf{q}}^2$, descrive la rotazione intorno ad un solo giunto. L'effetto complessivo, sui tre giunti, sarà infine ottenuto come opportuna combinazione lineare delle tre colonne.

1.5.1 Colonna $\mathbf{C}_{e.1}(\mathbf{q})$

La prima colonna di $\mathbf{C}_e(\mathbf{q})$ descrive la coppia ai tre motori per generare, per ogni massa, una forza centripeta attraente sul primo giunto. In pratica viene solo considerata la componente di movimento pari a $\dot{\mathbf{q}}^{(1)}$

$$\dot{\mathbf{q}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.64)$$

A questo movimento, corrispondono, per ogni massa, i seguenti raggi di rotazione:

m_1 ruota, intorno ad \mathbf{o}_1 , con un raggio $r = \mathbf{b}_1$

m_2 ruota, intorno ad \mathbf{o}_1 , con un raggio $r = \mathbf{l}_1 + \mathbf{b}_2$

m_3 ruota, intorno ad \mathbf{o}_1 , con un raggio $r = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3$

Da queste considerazioni risulta che le coppie, che devono essere fornite per ogni massa, sono:

$$\boldsymbol{\tau}^{(m1)} = m_1(\mathbf{b}_1 \times \mathbf{l})\dot{\theta}_1^2$$

$$\boldsymbol{\tau}^{(m2)} = m_2((\mathbf{l}_1 + \mathbf{b}_2) \times \mathbf{l})\dot{\theta}_1^2$$

$$\boldsymbol{\tau}^{(m3)} = m_3((\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3) \times \mathbf{l})\dot{\theta}_1^2$$

Dove \mathbf{l} varia da giunto a giunto e rappresenta il braccio della forza, dall'asse motore al centro di massa. Segue lo studio dei singoli elementi.

Elemento $\mathbf{C}_{e11}(\mathbf{q})$

Descrive la coppia sviluppata dal primo motore come componente della forza centrifuga durante il movimento del solo primo giunto. Essa è data da tre componenti elementari necessarie a generare la forza centripeta sulle masse m_1 , m_2 ed m_3 . Tali componenti, in questo particolare caso, risultano tutte nulle. La componente di forza centripeta generata su m_1 è nulla in quanto il braccio della forza, $\mathbf{l} = \mathbf{b}_1$, è identico al raggio: le componenti forza radiali non contribuiscono alla coppia. Per vettori paralleli infatti, il prodotto vettoriale nella 1.61 si annulla.

$$\boldsymbol{\tau}_1^{(m1)} = m_1(\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_1)\dot{\theta}_1^2 = 0$$

La spiegazione fisica di ciò risiede banalmente nel fatto che, essendo la forza radiale, essa viene fornita dalla rigidità del primo link. Questa considerazione è vera anche per le masse m_2 ed m_3 . Per la prima abbiamo $\mathbf{r} = \mathbf{l} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{b}_2$, per la seconda $\mathbf{r} = \mathbf{l} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3$. In conclusione

$$\mathbf{C}_{e11}(\mathbf{q}) = 0 \quad (1.65)$$

Elemento $C_{e21}(\mathbf{q})$

Descrive la coppia sviluppata dal secondo motore, necessaria per generare la forza centripeta sulle masse m_1 , m_2 ed m_3 , sempre quando ruota θ_1 . La componente di forza centripeta generata su m_1 è nulla, in quanto m_1 si trova a monte rispetto al giunto due. La componente di forza centripeta generata su m_2 si ricava invece dalla 1.61, considerando che il braccio della forza è pari a \mathbf{b}_2 .

$$\begin{aligned}\tau_2^{(m2)} &= m_2((\mathbf{l}_1 + \mathbf{b}_2) \times \mathbf{b}_2)\dot{\theta}_1^2 \\ \tau_2^{(m2)} &= m_2 l_1 b_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2\end{aligned}$$

Infine la componente su m_3 si ricava dalla 1.61 considerando $\mathbf{l} = \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3$.

$$\begin{aligned}\tau_2^{(m3)} &= m_3((\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3) \times (\mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3))\dot{\theta}_1^2 \\ \tau_2^{(m3)} &= (m_3 l_1 l_2 \sin \theta_2 + m_3 l_1 b_3 \sin(\theta_2 + \theta_3))\dot{\theta}_1^2\end{aligned}$$

L'elemento (2, 1) di $C_e(\mathbf{q})$ si ottiene sommando i contributi delle varie masse e raccogliendo $\dot{\theta}_1^2$. Esso risulta:

$$C_{e21}(\mathbf{q}) = m_2 l_1 b_2 \sin \theta_2 + m_3 l_1 l_2 \sin \theta_2 + m_3 l_1 b_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \quad (1.66)$$

Elemento $C_{e31}(\mathbf{q})$

Descrive la coppia sviluppata dal terzo motore necessaria per generare la forza centripeta sulla massa m_3 , in quanto m_1 e m_2 si trovano a monte rispetto al giunto due. Tale coppia si ricava dalla 1.61 considerando che il braccio vale $\mathbf{l} = \mathbf{b}_3$.

$$\begin{aligned}\tau_3^{(m3)} &= m_3((\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3) \times (\mathbf{b}_3))\dot{\theta}_1^2 \\ \tau_3^{(m3)} &= (m_3 l_1 b_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + m_3 l_2 b_3 \sin \theta_3)\dot{\theta}_1^2\end{aligned}$$

L'elemento (3, 1) di $C_e(\mathbf{q})$ si ottiene raccogliendo $\dot{\theta}_1^2$:

$$C_{e31}(\mathbf{q}) = m_3 l_1 b_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + m_3 l_2 b_3 \sin \theta_3 \quad (1.67)$$

1.5.2 Colonna $C_{e,2}(\mathbf{q})$

La seconda colonna di $C_e(\mathbf{q})$ descrive la coppia ai tre motori per generare, per ogni massa, una forza centripeta attraente sul secondo giunto. In questo caso la componente di movimento considerata è pari a $\dot{\mathbf{q}}^{(2)}$

$$\dot{\mathbf{q}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.68)$$

A questo movimento, corrispondono i seguenti raggi di rotazione

m_2 ruota, intorno ad \mathbf{o}_2 , con un raggio $r = \mathbf{b}_2$;

m_3 ruota, intorno ad \mathbf{o}_2 , con un raggio $r = \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3$;

La massa m_1 non compare in quanto ferma. Da queste considerazioni risulta che devono essere fornite alle tre masse le seguenti forze centripete:

$$\boldsymbol{\tau}^{(m1)} = 0$$

$$\boldsymbol{\tau}^{(m2)} = m_2(\mathbf{b}_2 \times \mathbf{l})\dot{\theta}_2^2$$

$$\boldsymbol{\tau}^{(m3)} = m_3(\mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3 \times \mathbf{l})\dot{\theta}_2^2$$

Dove \mathbf{l} varia da giunto a giunto e rappresenta il braccio della forza, dall'asse motore al centro di massa. Segue lo studio dei singoli elementi.

Elemento $\mathbf{C}_{e12}(\mathbf{q})$

Descrive la coppia sviluppata dal primo motore come componente della forza centripeta durante il movimento del solo giunto due. Essa è data da tre componenti elementari necessarie a generare la forza centripeta sulle masse m_1 , m_2 ed m_3 . La componente di forza centripeta generata su m_1 è nulla in quanto il primo braccio è fermo. La componente di forza centripeta generata su m_2 si ricava dalla 1.61 considerando che il braccio della forza è pari a $\mathbf{l}_1 + \mathbf{b}_2$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_1^{(m2)} &= m_2(\mathbf{b}_2 \times (\mathbf{l}_1 + \mathbf{b}_2))\dot{\theta}_2^2 \\ \tau_1^{(m2)} &= -m_2 l_1 b_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2\end{aligned}$$

Infine la componente su m_3 si ricava dalla 1.61 considerando $\mathbf{l} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_1^{(m3)} &= m_3((\mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3) \times (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3))\dot{\theta}_2^2 \\ \tau_1^{(m3)} &= -m_3 l_1 l_2 \sin \theta_2 - m_3 l_1 b_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_2^2\end{aligned}$$

L'elemento (1, 2) di $\mathbf{C}_e(\mathbf{q})$ si ottiene sommando i contributi delle varie masse e raccogliendo $\dot{\theta}_2^2$. Esso risulta:

$$\mathbf{C}_{e12}(\mathbf{q}) = -m_2 l_1 b_2 \sin \theta_2 - m_3 l_1 l_2 \sin \theta_2 - m_3 l_1 b_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \quad (1.69)$$

Si nota che $\mathbf{C}_{e12} = -\mathbf{C}_{e21}$. Infatti, in questo particolare caso di manipolatore planare a giunti rotativi la matrice $\mathbf{C}_e(\mathbf{q})$ risulterà antisimmetrica.

Elemento $\mathbf{C}_{e22}(\mathbf{q})$

Descrive la coppia sviluppata dal secondo motore, quando ruota θ_2 , necessaria per generare la forza centripeta sulle masse m_2 ed m_3 . Infatti m_1 è ferma. La componente di forza centripeta generata su m_2 è nulla in quanto la forza centripeta risulta radiale. La componente su m_3 si ricava dalla 1.61 considerando $\mathbf{l} = \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3$ e risulta nulla in quanto scomponibile in componenti radiali.

$$\boldsymbol{\tau}_2^{(m3)} = m_3((\mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3) \times (\mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3))\dot{\theta}_2^2 = 0$$

L'elemento (2, 2) di $\mathbf{C}_e(\mathbf{q})$ risulta pertanto nullo:

$$\mathbf{C}_{e22}(\mathbf{q}) = 0 \quad (1.70)$$

Elemento $C_{e32}(\mathbf{q})$

Descrive la coppia sviluppata dal terzo motore necessaria per generare la forza centripeta quando ruota solo θ_2 . Essa agisce solo sulla massa m_3 , in quanto m_1 e m_2 si trovano a monte rispetto al giunto tre. Tale coppia si ricava dalla 1.61 considerando che il braccio vale $\mathbf{l} = \mathbf{b}_3$.

$$\begin{aligned}\tau_3^{(m3)} &= m_3((\mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3) \times (\mathbf{b}_3))\dot{\theta}_2^2 \\ \tau_3^{(m3)} &= m_3 l_2 b_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_2^2\end{aligned}$$

L'elemento (3,2) di $C_e(\mathbf{q})$ si ottiene raccogliendo $\dot{\theta}_1^2$:

$$C_{e32}(\mathbf{q}) = m_3 l_2 b_3 \sin \theta_3 \quad (1.71)$$

1.5.3 Colonna $C_{e.3}(\mathbf{q})$

La terza colonna di $C_e(\mathbf{q})$ descrive la coppia ai tre motori per generare, per ogni massa, una forza centripeta attraente sul terzo giunto. In questo caso la componente di movimento considerata è pari a $\dot{\mathbf{q}}^{(3)}$

$$\dot{\mathbf{q}}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}, \quad (1.72)$$

In questo movimento, i primi due link sono fermi, mentre m_3 ruota, intorno ad \mathbf{o}_3 , con un raggio $r = \mathbf{b}_3$. Alle tre masse, secondo la 1.61 devono essere fornite le seguenti forze centripete:

$$\begin{aligned}\tau^{(m1)} &= 0 \\ \tau^{(m2)} &= 0 \\ \tau^{(m3)} &= m_3(\mathbf{b}_3 \times \mathbf{l})\dot{\theta}_3^2\end{aligned}$$

Dove \mathbf{l} varia da giunto a giunto e rappresenta il braccio della forza, dall'asse motore al centro di massa. Segue lo studio dei singoli elementi.

Elemento $C_{e13}(\mathbf{q})$

Descrive la coppia sviluppata dal primo motore. La forza centripeta su m_1 ed m_2 sono nulle in quanto i primi bracci sono fermi. La componente su m_3 si ricava dalla 1.61 considerando $\mathbf{l} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3$.

$$\begin{aligned}\tau_1^{(m3)} &= m_3(\mathbf{b}_3 \times (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3))\dot{\theta}_3^2 \\ \tau_1^{(m3)} &= (-m_3 l_1 b_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) - m_3 l_2 b_3 \sin \theta_3)\dot{\theta}_3^2\end{aligned}$$

L'elemento (1,3), ottenuto raccogliendo $\dot{\theta}_3^2$, risulta:

$$C_{e13}(\mathbf{q}) = -m_3 l_1 b_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) - m_3 l_2 b_3 \sin \theta_3 \quad (1.73)$$

Si nota che $C_{e13} = -C_{e31}$.

Elemento $C_{e23}(\mathbf{q})$

Descrive la coppia sviluppata dal secondo motore, quando ruota θ_3 . L'unica massa in moto è m_3 . Per essa la componente si ricava dalla 1.61 considerando $\mathbf{l} = \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3$.

$$\begin{aligned}\tau_2^{(m3)} &= m_3((\mathbf{b}_3) \times (\mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3))\dot{\theta}_3^2 = 0 \\ \tau_2^{(m3)} &= -m_3 l_2 b_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_2^2\end{aligned}$$

L'elemento (2,3) risulta pertanto:

$$C_{e23}(\mathbf{q}) = -m_3 l_2 b_3 \sin \theta_3 \quad (1.74)$$

Elemento $C_{e33}(\mathbf{q})$

Questo elemento è banalmente nullo, in quanto la forza centripeta su m_3 , quando ruota solo θ_3 , è radiale al terzo braccio.

$$C_{e33}(\mathbf{q}) = 0 \quad (1.75)$$

1.6 La forza di Coriolis

Quando un corpo si muove radialmente, in un sistema di riferimento in rotazione uniforme, esso è soggetto alla forza di Coriolis. L'esempio tipico è quello di un disco in rotazione a velocità costante, una giostra in un "prato", e di un corpo che, in rotazione solidale al disco, compia rispetto ad esso una traiettoria radiale dal centro verso il bordo (del disco). Prendendo un riferimento fisso rispetto al "prato", si osserva che, quando il corpo si trova nel centro del disco, tale corpo possiede una velocità tangenziale nulla, ma, quando si sposta verso il bordo, questa incrementa fino al valore massimo che si ha proprio sul bordo. Ovviamente per variare la propria velocità lineare (tangenziale) il corpo deve aver subito l'azione di una forza. Essa è chiamata forza di Coriolis e vale

$$\mathbf{F}_c = 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \quad (1.76)$$

dove m è la massa del corpo, \mathbf{v} è il vettore velocità del corpo rispetto al disco e $\boldsymbol{\omega}$ la velocità di rotazione del disco. Si noti che \mathbf{F}_c è nulla quando \mathbf{v} non ha componente radiale. La forza di Coriolis è presente nel moto di un robot a più link, nel caso di movimento simultaneo di almeno due bracci. Nel caso esemplificativo di figura 1.4 sono mostrati due link in rotazione a velocità angolare costante. Il giunto uno imprime una rotazione a velocità costante $\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\boldsymbol{\theta}}_1$ a tutto il braccio. Compie cioè il lavoro del disco rotante. Il giunto due, rotando a velocità $\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\boldsymbol{\theta}}_2$, determina un movimento di m che potenzialmente possiede delle componenti radiali rispetto al giunto uno. In pratica il giunto uno deve fornire una coppia aggiuntiva, necessaria al movimento simultaneo dei due giunti. Considerando che la velocità lineare impressa dal secondo giunto vale

$$\mathbf{v} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_2 \times \mathbf{l}_2$$

ed il braccio da \mathbf{o}_1 a m vale

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2,$$

la forza di Coriolis è generata dalla seguente coppia sul giunto uno:

$$\begin{aligned}\tau_{co} &= (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2) \times 2m[\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 \times (\dot{\boldsymbol{\theta}}_2 \times \mathbf{l}_2)] \\ \tau_{co} &= -2m(\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2) \times [(\dot{\boldsymbol{\theta}}_2 \times \mathbf{l}_2) \times \dot{\boldsymbol{\theta}}_1] \\ \tau_{co} &= -2m(\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2) \times (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \mathbf{l}_2)\end{aligned}$$

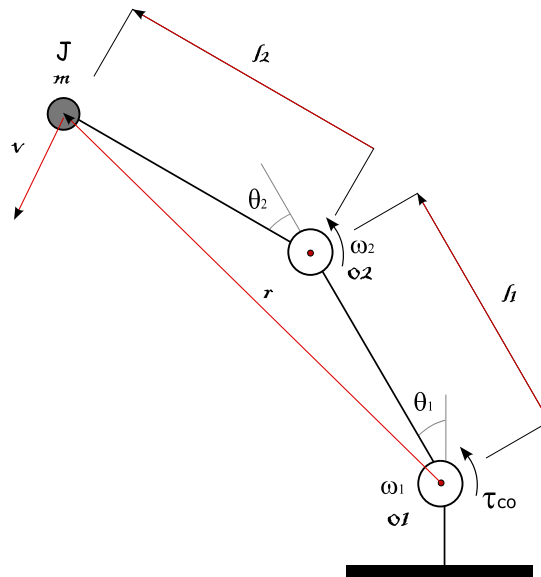


Figura 1.4: Caso esemplificativo: forza di Coriolis in un manipolatore ideale a due link con un solo punto di massa

Una spiegazione alternativa del fenomeno risiede nel fatto che, quando la massa m si allontana da o_1 , il momento di inerzia visto dal giunto uno va aumentando, pertanto, per mantenere la velocità costante, è necessario applicare la coppia τ_{co} .

1.6.1 La matrice $C_o(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$

La matrice $C_o(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ descrive le coppie ai tre motori necessarie ad imprimere la forza di Coriolis.

$$\boldsymbol{\tau}_{co} = \mathbf{C}_o(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \quad (1.77)$$

Ogni elemento è relativo alla componente di rotazione simultanea di soli due giunti. Tali componenti contribuiscono alla coppia totale, combinandosi opportunamente, in funzione del vettore $\dot{\mathbf{q}}$. Nella pratica la predisposizione di tale matrice non è univoca. Per questo, invece di analizzare i singoli elementi, preferisco descrivere le situazioni elementari, corrispondenti a tre possibili coppie $(\dot{\theta}_i, \dot{\theta}_j)$ di rotazioni simultanee. Il contributo di coppia complessivo è dato da una combinazione lineare dei singoli contributi sviluppati nelle situazioni elementari, secondo la 1.77. Ad ogni contributo viene infine associato un elemento di \mathbf{C}_o , secondo una particolare scelta arbitraria.

Rotazione di θ_1 e θ_2

In questa sezione viene analizzata la forza di Coriolis necessaria al movimento rotatorio uniforme dei giunti uno e due. Per analogia con l'esempio riportato, si può pensare che il disco sia solidale al primo braccio ($\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}_1$), mentre i vettori delle velocità siano costituiti dalle velocità

tangenziali delle due masse, dovute alla rotazione intorno a \mathbf{o}_2 .

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{m2} &= \dot{\boldsymbol{\theta}}_2 \times \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{v}_{m3} &= \dot{\boldsymbol{\theta}}_2 \times (\mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3)\end{aligned}$$

Le forze di Coriolis agenti sulle due masse sono pertanto:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{c2} &= -2m_2(\mathbf{v}_{m2} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}_1) = -2m_2((\dot{\boldsymbol{\theta}}_2 \times \mathbf{b}_2) \times \dot{\boldsymbol{\theta}}_1) \\ \mathbf{F}_{c3} &= -2m_3(\mathbf{v}_{m3} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}_1) = -2m_3((\dot{\boldsymbol{\theta}}_2 \times (\mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3)) \times \dot{\boldsymbol{\theta}}_1)\end{aligned}$$

La coppia al giunto uno, necessaria per imprimere la forza sulla seconda massa, risulta:

$$\boldsymbol{\tau}_1^{(m2)} = (\mathbf{l}_1 + \mathbf{b}_2) \times \mathbf{F}_{c2}$$

Si noti che \mathbf{F}_{c2} è parallela a \mathbf{b}_2 , in quanto il prodotto vettoriale

$$((\dot{\boldsymbol{\theta}}_2 \times \mathbf{b}_2) \times \dot{\boldsymbol{\theta}}_1)$$

risulta pari a $\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \mathbf{b}_2$. Grazie a questa uguaglianza, possiamo ricavare:

$$\tau_1^{(m2)} = -2m_2 l_1 b_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2$$

Analogamente, per la terza massa abbiamo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_1^{(m3)} &= (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3) \times \mathbf{F}_{c3} \\ \tau_1^{(m3)} &= -2m_3 l_1 l_2 \sin \theta_2 - 2m_3 l_1 b_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2\end{aligned}$$

Infine, è possibile raccogliere i contributi di coppia al giunto uno nell'elemento (1, 2) di \mathbf{C}_o

$$\mathbf{C}_{o12} = -2m_2 l_1 b_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 - 2m_3 (l_1 l_2 \sin \theta_2 + l_1 b_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)) \dot{\theta}_1 \quad (1.78)$$

La coppia al giunto due, per imprimere la forza sulla seconda massa, risulta invece:

$$\boldsymbol{\tau}_2^{(m2)} = \mathbf{b}_2 \times \mathbf{F}_{c2}$$

Poiché \mathbf{F}_{c2} è parallela a \mathbf{b}_2 tale componente è nulla. Anche la componente dovuta a m_3 è nulla, infatti

$$\boldsymbol{\tau}_1^{(m3)} = (\mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3) \times \mathbf{F}_{c3}$$

ed \mathbf{F}_{c3} è parallela a $(\mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3)$. In generale la forza di Coriolis, agente su una generica massa i , ha direzione radiale rispetto al giunto i , pertanto non genera coppia su quel giunto. Infine la coppia al giunto tre risulta nulla per la seconda massa, in quanto a valle della catena cinematica, mentre risulta per la terza pari a:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_3^{(m3)} &= \mathbf{b}_3 \times \mathbf{F}_{c3} \\ \tau_3^{(m3)} &= 2m_3 (l_2 b_3 \sin(\theta_3)) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2\end{aligned}$$

Tali contributi di coppia al giunto tre sono raccolti nell'elemento (3, 2) di \mathbf{C}_o

$$\mathbf{C}_{o32} = 2m_3 (l_2 b_3 \sin(\theta_3)) \dot{\theta}_1 \quad (1.79)$$

Rotazione di θ_1 e θ_3

Ora passiamo alla forza di Coriolis necessaria al movimento rotatorio uniforme dei giunti uno e tre. Si immagini ancora una volta il disco solidale al primo braccio - $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_1$ - ed il seguente vettore di velocità tangenziale, dovuta alla rotazione intorno a \mathbf{o}_3 .

$$\mathbf{v}_{m3} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_3 \times \mathbf{b}_3$$

Ovviamente solo m_3 ruota intorno a \mathbf{o}_3 . La forza di Coriolis agente sulla massa è:

$$\mathbf{F}_{c3} = -2m_3(\mathbf{v}_{m3} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}_1) = -2m_3((\dot{\boldsymbol{\theta}}_3 \times \mathbf{b}_3) \times \dot{\boldsymbol{\theta}}_1)$$

La coppia al giunto uno, necessaria per imprimere la forza \mathbf{F}_{c3} , risulta:

$$\begin{aligned} \tau_1^{(m3)} &= (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3) \times \mathbf{F}_{c3} \\ \tau_1^{(m3)} &= -2m_3(l_1 b_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + l_2 b_3 \sin(\theta_3)) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \end{aligned}$$

Essa è rappresentabile tramite l'elemento (1, 3) di \mathbf{C}_o

$$\mathbf{C}_{o13} = -2m_3(l_1 b_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + l_2 b_3 \sin(\theta_3)) \dot{\theta}_1 \quad (1.80)$$

La coppia al giunto due risulta invece:

$$\begin{aligned} \tau_2^{(m3)} &= (\mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3) \times \mathbf{F}_{c3} \\ \tau_2^{(m3)} &= -2m_3(l_2 b_3 \sin(\theta_3)) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \end{aligned}$$

ed il relativo elemento di \mathbf{C}_o è

$$\mathbf{C}_{o21} = -2m_3(l_2 b_3 \sin(\theta_3)) \dot{\theta}_1 \quad (1.81)$$

Infine la coppia al giunto tre è nulla, in quanto la forza di Coriolis risulta radiale.

Rotazione di θ_2 e θ_3

In ultimo descriviamo la forza di Coriolis necessaria al movimento rotatorio uniforme dei giunti due e tre. Questa volta possiamo immaginare il disco solidale al secondo braccio - $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_2$ - ed il vettore di velocità tangenziale dovuto alla rotazione intorno a \mathbf{o}_3 .

$$\mathbf{v}_{m3} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_3 \times (\mathbf{b}_3)$$

Anche questa volta solo m_3 ruota intorno a \mathbf{o}_3 . La forza di Coriolis agente sulla massa è:

$$\mathbf{F}_{c3} = -2m_3(\mathbf{v}_{m3} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}_2) = -2m_3((\dot{\boldsymbol{\theta}}_3 \times \mathbf{b}_3) \times \dot{\boldsymbol{\theta}}_2)$$

La coppia al giunto uno, necessaria per imprimere la forza \mathbf{F}_{c3} , risulta:

$$\begin{aligned} \tau_1^{(m3)} &= (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3) \times \mathbf{F}_{c3} \\ \tau_1^{(m3)} &= -2m_3(l_1 b_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + l_2 b_3 \sin(\theta_3)) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \end{aligned}$$

La coppia al giunto due risulta invece:

$$\begin{aligned}\tau_2^{(m3)} &= (\mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3) \times \mathbf{F}_{c3} \\ \tau_2^{(m3)} &= -2m_3(l_2 b_3 \sin(\theta_3))\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3\end{aligned}$$

Infine la coppia al giunto tre è nulla, in quanto la forza di Coriolis risulta ancora radiale rispetto ad \mathbf{o}_3 . In questo caso è possibile associare all'elemento (2, 3) il seguente contributo di coppia al giunto due

$$\mathbf{C}_{o23} = -2m_3(l_2 b_3 \sin(\theta_3))\dot{\theta}_2 \quad (1.82)$$

mentre il contributo di coppia al giunto uno può essere sommato all'elemento (1, 2)

$$\mathbf{C}_{o12+} = -2m_3(l_2 b_3 \sin(\theta_3))\dot{\theta}_3 \quad (1.83)$$

1.6.2 Sintesi della matrice delle forze centripete e di Coriolis

Una notazione consolidata in robotica è quella di accorpare le forze centripete e di Coriolis in un'unica matrice \mathbf{C} .

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{C}_e(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}^2 + \mathbf{C}_o(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \quad (1.84)$$

Per ottenerla è necessario portare la matrice \mathbf{C}_e nella seguente notazione

$$\mathbf{C}_e(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}^2 = \mathbf{C}_e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$$

raccogliendo opportunamente le velocità angolari.

1.7 La forza di gravità

La componente gravitazionale $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ è sicuramente più semplice delle precedenti. Su ogni massa m agisce una forza pari a

$$\mathbf{F}_g = m\mathbf{g},$$

dove \mathbf{g} rappresenta il vettore accelerazione gravitazionale, diretto verso il basso. La coppia gravitazionale agente sul primo giunto può essere calcolata considerando i seguenti contributi: In particolare il primo giunto dovrà fornire, per equilibrare le tre forze in figura, i seguenti contributi di coppia:

$$\begin{aligned}\tau_1^{(m1)} &= -\mathbf{b}_1 \times m\mathbf{g} = -m_1(\mathbf{b}_1 \times \mathbf{g}) \\ \tau_1^{(m2)} &= -m_2((\mathbf{l}_1 + \mathbf{b}_2) \times \mathbf{g}) \\ \tau_1^{(m3)} &= -m_3((\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3) \times \mathbf{g})\end{aligned}$$

Il modulo di tali coppie vale

$$\begin{aligned}\tau_1^{(m1)} &= m_1 b_1 g \sin \theta_1 \\ \tau_1^{(m2)} &= m_2 l_1 g \sin \theta_1 + m_2 b_2 g \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \tau_1^{(m3)} &= m_3 l_1 g \sin \theta_1 + m_3 l_2 g \sin(\theta_1 + \theta_2) + m_3 b_3 g \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\end{aligned}$$

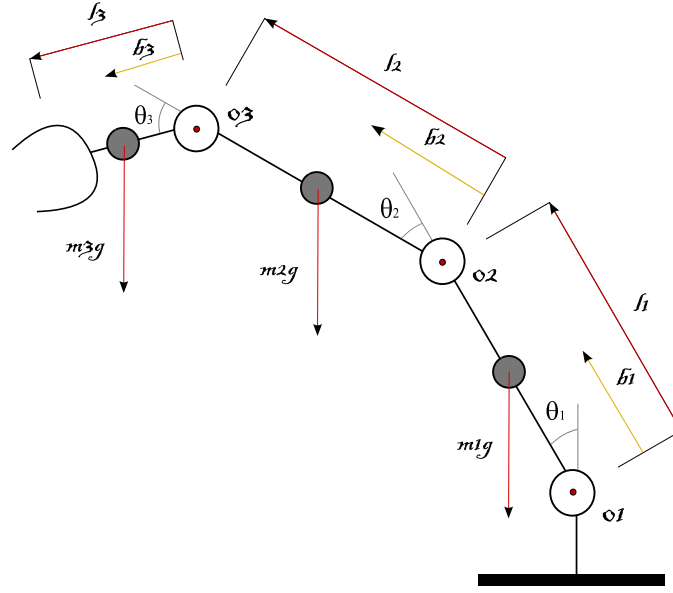


Figura 1.5: Forza gravitazionale agente sul manipolatore

Si noti che nel caso di $\tau_1^{(m_1)}$, $(\mathbf{b}_1 \times \mathbf{g}) = -b_1 g \sin \theta_1$ in quanto θ_1 è l'angolo tra \mathbf{g} e \mathbf{b}_1 , ovvero meno l'angolo tra \mathbf{b}_1 e \mathbf{g} . Analoghe considerazioni valgono per le coppie generate dalle masse m_2 ed m_3 . L'elemento del vettore $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ in prima posizione vale

$$g_1(\mathbf{q}) = \tau_1^{(m_1)} + \tau_1^{(m_2)} + \tau_1^{(m_3)} \quad (1.85)$$

Il secondo giunto risente solo dei contributi gravitazionali su m_2 ed m_3 . Per bilanciarli esso dovrà produrre le seguenti coppie:

$$\begin{aligned} \tau_2^{(m_2)} &= m_2((\mathbf{b}_2) \times \mathbf{g}) \\ \tau_2^{(m_3)} &= m_3((\mathbf{l}_2 + \mathbf{b}_3) \times \mathbf{g}) \end{aligned}$$

Il modulo di tali coppie vale

$$\begin{aligned} \tau_2^{(m_2)} &= m_2 b_2 g \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \tau_2^{(m_3)} &= m_3 l_2 g \sin(\theta_1 + \theta_2) + m_3 b_3 g \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{aligned}$$

Il secondo elemento di $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ risulta

$$g_2(\mathbf{q}) = \tau_2^{(m_2)} + \tau_2^{(m_3)} \quad (1.86)$$

Il terzo giunto deve invece bilanciare solamente la forza gravitazionale sulla terza massa:

$$\begin{aligned} \tau_3^{(m_3)} &= m_3(\mathbf{b}_3 \times \mathbf{g}) \\ \tau_3^{(m_3)} &= m_3 b_3 g \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{aligned}$$

Si giunge così al terzo ed ultimo elemento di $\mathbf{g}(\mathbf{q})$:

$$g_3(\mathbf{q}) = \tau_3^{(m_3)} \quad (1.87)$$

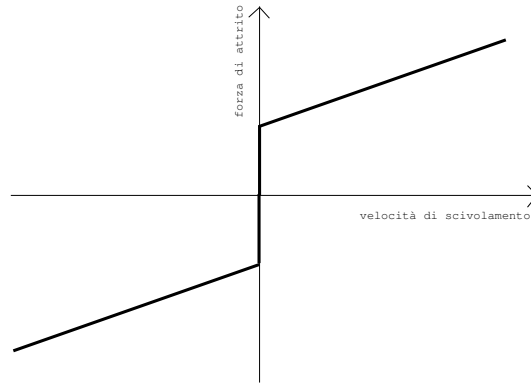


Figura 1.6: Curva approssimante l'attrito

1.8 Gli attriti

Nella stesura del modello consideriamo, come approssimante delle forze di attrito ai giunti, la curva di figura 1.6, ovvero valutiamo solo l'attrito di tipo dinamico e viscoso. Il primo è modellizzabile come una forza di modulo costante sempre contraria alla direzione del movimento, data per ogni giunto i da θ_i .

$$\tau_i^{(d)} = -f_{di} \text{sign}\theta_i \quad (1.88)$$

dove il segno negativo è già inglobato nella 1.2. Il secondo (attrito viscoso) è dovuto al moto in presenza di lubrificante ed è proporzionale alla velocità di giunto. Per ogni giunto la componente è data da:

$$\tau_i^{(v)} = -f_{vi}\theta_i \quad (1.89)$$

dove il segno negativo è già inglobato nella 1.2. Con riferimento all'equazione generale 1.3 i valori dei coefficienti d'attrito f_{vi} e f_{di} risultano pertanto sulla diagonale delle matrici \mathbf{F}_d e \mathbf{F}_v .

1.9 Sintesi del modello completo

Questa sezione riassume la il modello dinamico ottenuto. Con riferimento l'equazione differenziale 1.3, qui riscritta in forma esplosa

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & 0 & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} f_{d1} & 0 & 0 \\ 0 & f_{d2} & 0 \\ 0 & 0 & f_{d3} \end{bmatrix} \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) + \begin{bmatrix} f_{v1} & 0 & 0 \\ 0 & f_{v2} & 0 \\ 0 & 0 & f_{v3} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (1.90)$$

di seguito vengono riportati i valori dei singoli elementi.

$$\begin{aligned}
B_{11} &= m_1 b_1^2 + J_1 + m_2 l_1^2 + m_2 b_2^2 + m_2 l_1 b_2 \cos \theta_2 + J_2 + m_3 l_1^2 + m_3 l_2^2 + m_3 b_3^2 + \\
&\quad 2m_3 l_1 b_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + 2m_3 l_1 l_2 \cos \theta_2 + 2m_3 l_2 b_3 \cos \theta_3 + J_3 \\
B_{21} &= m_2 b_2^2 + m_2 l_1 b_2 \cos \theta_2 + J_2 + m_3 l_2^2 + m_3 b_3^2 + m_3 l_1 b_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + \\
&\quad m_3 l_1 l_2 \cos \theta_2 + 2m_3 l_2 b_3 \cos \theta_3 + J_3 \\
B_{31} &= m_3 b_3^2 + m_3 l_1 b_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + m_3 l_2 b_3 \cos \theta_3 + J_3 \\
B_{12} &= m_2 b_2^2 + m_2 l_1 b_2 \cos \theta_2 + J_2 + m_3 l_2^2 + m_3 b_3^2 + m_3 l_1 b_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + \\
&\quad m_3 l_1 l_2 \cos \theta_2 + 2m_3 l_2 b_3 \cos \theta_3 + J_3 \\
B_{22} &= m_2 b_2^2 + J_2 + m_3 l_2^2 + m_3 b_3^2 + 2m_3 l_2 b_3 \cos \theta_3 + J_3 \\
B_{32} &= m_3 b_3^2 + m_3 l_2 b_3 \cos \theta_3 + J_3 \\
B_{13} &= m_3 b_3^2 + m_3 l_1 b_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + m_3 l_2 b_3 \cos \theta_3 + J_3 \\
B_{23} &= m_3 b_3^2 + m_3 l_2 b_3 \cos \theta_3 + J_3 \\
B_{33} &= m_3 b_3^2 + J_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{21} &= m_2 l_1 b_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + m_3 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + m_3 l_1 b_3 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) - 2m_3 l_2 b_3 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_3) \\
C_{31} &= m_3 l_1 b_3 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) + m_3 l_2 b_3 \dot{\theta}_1 \sin \theta_3 \\
C_{12} &= -m_2 l_1 b_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - m_3 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - m_3 l_1 b_3 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) - 2m_2 l_1 b_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \\
&\quad - 2m_3 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - 2m_3 l_1 b_3 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) - 2m_3 l_2 b_3 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_3) \\
C_{32} &= m_3 l_2 b_3 \dot{\theta}_2 \sin \theta_3 + 2m_3 l_2 b_3 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_3) \\
C_{13} &= -m_3 l_1 b_3 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) - m_3 l_2 b_3 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 - 2m_3 l_1 b_3 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\
&\quad - 2m_3 l_2 b_3 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_3) \\
C_{23} &= -m_3 l_2 b_3 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 - 2m_3 l_2 b_3 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_2 \\
g_1 &= m_1 g b_1 \sin \theta_1 + m_2 g b_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + m_2 g l_1 \sin \theta_1 + m_3 g b_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\
&\quad + m_3 g l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + m_3 g l_1 \sin \theta_1 \\
g_2 &= m_2 g b_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + m_3 g b_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + m_3 g l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\
g_3 &= m_3 g b_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)
\end{aligned}$$

Alternativamente, evitando la notazione matriciale, è possibile scrivere le tre equazioni interdipendenti che descrivono il comportamento dei tre giunti.

$$\tau_1 = B_{11}\ddot{\theta}_1 + B_{12}\ddot{\theta}_2 + B_{13}\ddot{\theta}_3 + C_{12}\dot{\theta}_2 + C_{13}\dot{\theta}_3 + g_1 + f_{d1}\text{sign}(\theta_1) + f_{v1}\theta_1 \quad (1.91)$$

$$\tau_2 = B_{21}\ddot{\theta}_1 + B_{22}\ddot{\theta}_2 + B_{23}\ddot{\theta}_3 + C_{21}\dot{\theta}_2 + C_{23}\dot{\theta}_3 + g_2 + f_{d2}\text{sign}(\theta_2) + f_{v2}\theta_2 \quad (1.92)$$

$$\tau_3 = B_{31}\ddot{\theta}_1 + B_{32}\ddot{\theta}_2 + B_{33}\ddot{\theta}_3 + C_{31}\dot{\theta}_2 + C_{32}\dot{\theta}_3 + g_3 + f_{d3}\text{sign}(\theta_3) + f_{v3}\theta_3 \quad (1.93)$$