Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 20 febbraio 2015

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito A

T1) Si definisca quando una matrice quadrata $\mathbf{A}$ (di forma $n \times n$) è diagonalizzabile. Si dimostri: se $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile, allora $\mathbb{C}^n$ possiede una base composta da autovettori di $\mathbf{A}$.

T2) Si diano le definizioni di rango di una matrice e l'enunciato del teorema "nullità più rango". Si dimostri che, se $\mathbf{A}$ è una matrice $m \times n$, allora il rango di $\mathbf{A}$ è uguale al rango di $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$. (Suggerimento: si considerino $\mathrm{N}(\mathbf{A})$ e $\mathrm{N}(\mathbf{A}^H\mathbf{A})$.)

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 2\alpha & 4 \\ 2 & 0 & 2\alpha & 2\alpha - 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la P^TLU. Per $\alpha = 2$ si trovi una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_2)$. Inoltre si interpreti $\mathbf{A}_2$ come la matrice completa di un sistema lineare e si trovino tutte le soluzioni del sistema.

E2) Sia $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$, dove $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Si verifichi che $\mathscr{B}$ è una base di $\mathbb{C}^3$. Si consideri l'applicazione lineare $f \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3$, $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$, $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_3$.

(1) Si trovi la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alla base canonica sul dominio e sul codominio.
(2) Si calcoli il rango di f.
(3) Il vettore $\mathbf{w} = [0\ 1\ 1]^T$ appartiene all'immagine di f? Se sì, si trovi un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.
(4) Si trovi una base dello spazio nullo e dell'immagine di f.

E3) Si consideri la matrice ($\beta \in \mathbb{C}$)

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta - 2 & -1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile; si determini, quando esiste, una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$. Esiste una base ortogonale di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_1$?