Logica Computazionale - 2007-8
esercizio 5

October 31, 2007

Esercizio 1. Considera i termini e le derivazioni di tipo delle seguenti espressioni[1]

:

(a) $(\mathbf{succ}^{N\to N}\mathbf{2}^N) : \mathbf{N}$;

(b) $(\mathbf{plus}^{N\to(N\to N)}\mathbf{2}^N\mathbf{1}^N) : \mathbf{N}$;

(c) $(\mathbf{times}^{N\to(N\to N)}\mathbf{2}^N\mathbf{2}^N) : \mathbf{N}$;

Normalizza le prove/termini applicando entrambe le seguenti strategie, se differiscono.

(1) *leftmost reduction*;

(2) la strategia usata nella prova del teorema di normalizzazione debole.

Esercizio 2. Considera il calcolo dei sequenti intuizionistico $\mathbf{LJ}^{\supset\cap}$ (implicazione e congiunzione solamente) ed il calcolo dei sequenti per **S4**, con la traduzione modale della logica intuizionistica:

$$(p)^\Box =_{df} \Box p; \qquad (A\cap B)^\Box =_{df} A^\Box \wedge B^\Box; \qquad (A\supset B)^\Box =_{df} \Box(A^\Box \to B^\Box)$$

Prove il teorema di Gödel-Tarski-McKinsky-Kripke:

$\Gamma \Rightarrow A$ *è dimostrabile in* $\mathbf{LJ}^{\supset\cap}$ *se e solo se* $\Gamma^\Box \Rightarrow A^\Box$ *è dimostrabile in* **S4**.

[1] Ricorda che
$\mathbf{N} =_{df} (A\to A)\to(A\to A)$;
$\mathbf{n} =_{df} \lambda f^{A\to A}.\lambda x^A.f^n x : \mathbf{N}$,
$\mathbf{suc} =_{df} \lambda n^{\mathbf{N}}.\lambda f^{A\to A}.\lambda x^A.(nf)(fx) : \mathbf{N}\to\mathbf{N}$,
$\mathbf{plus} =_{df} \lambda m^{\mathbf{N}}.\lambda n^{\mathbf{N}}.\lambda f^{A\to A}.\lambda x^A.(mf)(n(fx)) : \mathbf{N}\to(\mathbf{N}\to\mathbf{N})$,
$\mathbf{times} =_{df} \lambda m^{\mathbf{N}}.\lambda n^{\mathbf{N}}.\lambda f^{A\to A}.(m(nf)) : \mathbf{N}\to(\mathbf{N}\to\mathbf{N})$.

(*solo se*): Prova il lemma $A^\Box \Leftrightarrow \Box A^\Box$ per induzione su A ed usa la regola del Cut.

(*se*): Prova il seguente Lemma:

Se $\Gamma^\Box \Rightarrow A^\Box$ *è dimostrabile in* **S4** *allora è dimostrabile con una prova in cui tutti i sequenti con più di una formula a destra hanno la forma* $\Gamma^\Box \Rightarrow \Box\Delta$ *oppure* $\Gamma^\Box \Rightarrow \Box\Delta, p$.

Procedi per induzione sulla lunghezza della data derivazione, considerando i casi in cui questa termina (a) con un assioma, (b) con una regola $\Box R$, (c) con una regola $\rightarrow$-R, (d) con una regola $\wedge$-R ed infine (e) con una regola a sinistra ($\rightarrow$-L e $\wedge$-L).