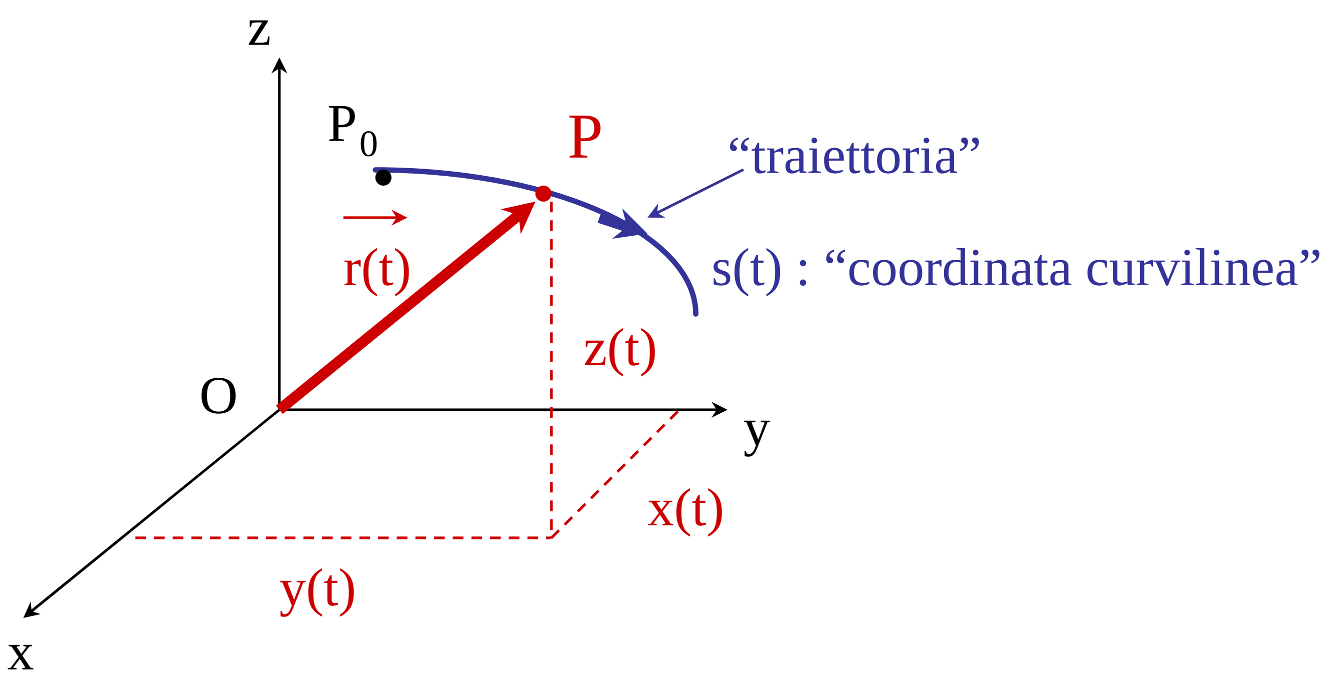
Moto curvilineo nello spazio tridimensionale

Moto di un "punto materiale" P nel sitema Oxyz

Legge del moto descritta dal vettore: $\overrightarrow{OP}(t) \equiv \vec{r}(t) \equiv \left(x(t), y(t), z(t)\right)$



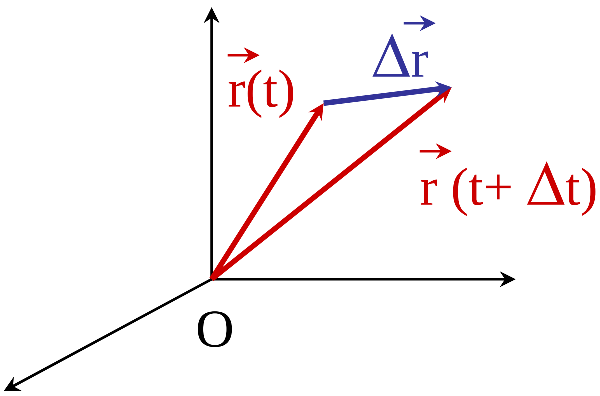
$$\left\{\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \text{"equazioni parametriche" della traiettoria nel parametro } t \text{ (tempo)}$$

Eliminando il tempo, ad es. invertendo la funzione x(t) : t= t(x)

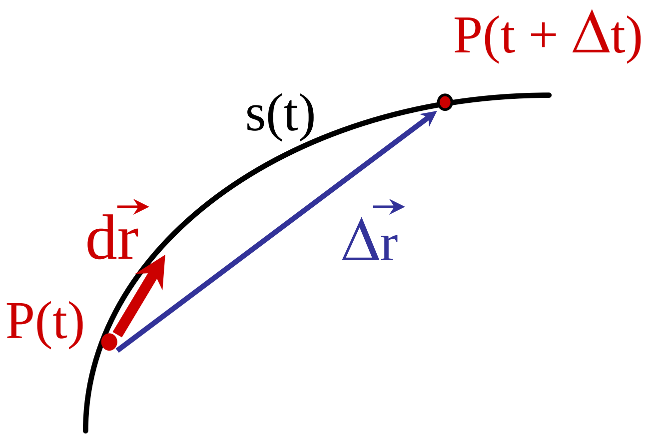
$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} y &= y\,[\,t(x)] = f_y(x) \\ z &= z\,[\,t(x)] = f_z(x) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{"equazioni della traiettoria"}$$

Vettore **velocità istantanea**:

$$\boxed{\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}}$$



La velocità istantanea é un vettore tangente alla traiettoria :



$$\Delta\vec{r} \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} d\vec{r} = ds\,\vec{u}_T$$

versore tangente

$$\boxed{\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_T = v(t)\vec{u}_T}$$

velocità scalare

- Componenti cartesiane del vettore velocità:

$$\vec{v} \equiv (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right)$$

Infatti:

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv \frac{d(x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z)}{dt} =$$

$$= \frac{dx(t)}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy(t)}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz(t)}{dt}\vec{u}_z =$$

$$= v_x(t)\vec{u}_x + v_y(t)\vec{u}_y + v_z(t)\vec{u}_z$$

- Problema inverso: da **v**(t) a **r**(t)

Se è nota la funzione (vettoriale) velocità, la legge del moto $\vec{r}(t)$ si ottiene per integrazione :

$$d\vec{r} = \vec{v}(t)dt \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{r} \equiv \vec{r}(t) - \vec{r}(t_o) = \int d\vec{r} = \int_{t_o}^{t} \vec{v}(t')dt'$$

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \vec{v}(t')dt'} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x(t) &= x(t_o) + \int_{t_o}^{t} v_x(t')dt' \\ y(t) &= y(t_o) + \int_{t_o}^{t} v_y(t')dt' \\ z(t) &= z(t_o) + \int_{t_o}^{t} v_z(t')dt' \end{aligned}$$

Vettore **accelerazione istantanea**:

$$\boxed{\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}}$$

• Componenti cartesiane dell'accelerazione:

$$\boxed{\vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z) = \left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \frac{d^2z(t)}{dt^2} \right)}$$

Infatti:

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \equiv \frac{d(v_x(t)\vec{u}_x + v_y(t)\vec{u}_y + v_z(t)\vec{u}_z)}{dt} =$$

$$= \frac{dv_x(t)}{dt}\vec{u}_x + \frac{dv_y(t)}{dt}\vec{u}_y + \frac{dv_z(t)}{dt}\vec{u}_z =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)\vec{u}_x + = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)\vec{u}_y + = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz(t)}{dt}\right)\vec{u}_z =$$

$$= \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{u}_x + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{u}_y + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{u}_z =$$

$$= a_x(t)\vec{u}_x + a_y(t)\vec{u}_y + a_z(t)\vec{u}_z$$

• Problema inverso: da **a**(t) a **v**(t) e **r**(t).

Dall'accelerazione **a**(t) alla velocità **v**(t):

Invertendo la relazione che definisce l'accelerazione

e integrando in funzione del tempo :

$$d\vec{v} = \vec{a}(t)dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta\vec{v} \equiv \vec{v}(t) - \vec{v}(t_o) = \int d\vec{v} = \int_{t_o}^{t} \vec{a}(t')dt'$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \vec{a}(t')dt'} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} v_x(t) &= v_x(t_o) + \int_{t_o}^{t} a_x(t')dt' \\ v_y(t) &= v_y(t_o) + \int_{t_o}^{t} a_y(t')dt' \\ v_z(t) &= v_z(t_o) + \int_{t_o}^{t} a_z(t')dt' \end{aligned}$$

Dalla velocità **v**(t) alla legge oraria del moto **r**(t)

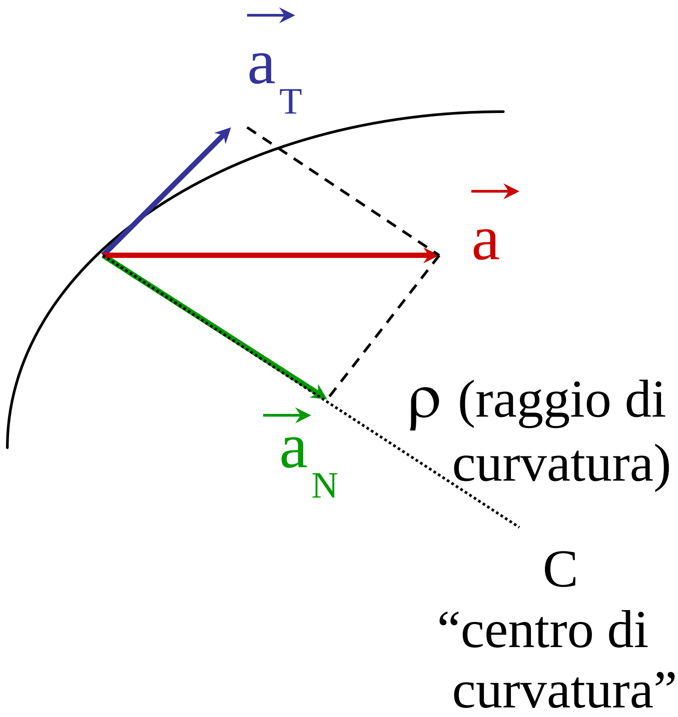
Una volta nota la la funzione vettoriale velocità istantanea, la legge oraria del moto **r**(t) si ottiene per integrazione di **v**(t) in funzione del tempo (vedi due diapositive più sopra)

Vettore **accelerazione:** ***componenti intrinseche***

L'accelerazione ha una componente tangente ed una componente normale alla traiettoria :

$$\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d[v(t)\vec{u}_T(t)]}{dt} =$$

$$= \frac{dv(t)}{dt}\vec{u}_T + \underbrace{v(t)\frac{d\vec{u}_T(t)}{dt}}_{\frac{v(t)}{\rho}\vec{u}_N}$$

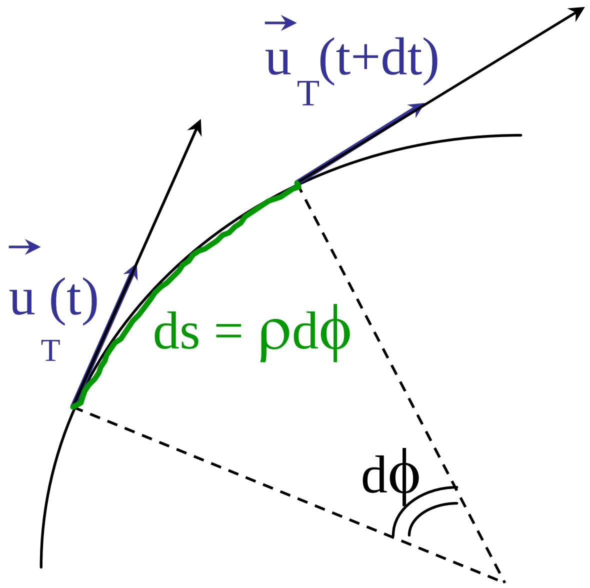


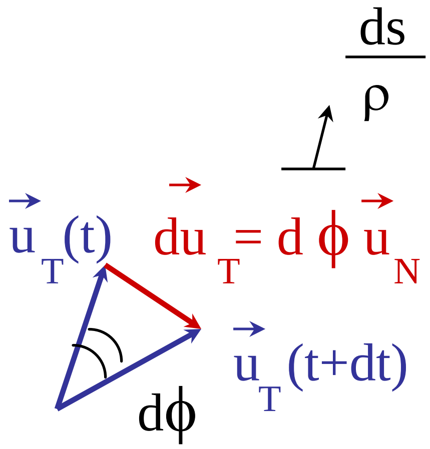
$$\boxed{\vec{a} = a_T \vec{u}_T + a_N \vec{u}_N}$$

accelerazione tangente : $a_T(t) = \dfrac{dv(t)}{dt}$

accelerazione normale : $a_N(t) = \dfrac{v^2(t)}{\rho(t)}$

Accelerazione normale:





$$d(\vec{u}_T^{\,2}) = 2\vec{u}_T \bullet d\vec{u}_T = 0 \qquad \Rightarrow \qquad d\vec{u}_T \perp \vec{u}_T$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\vec{u}_N = \frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt}\vec{u}_N = \frac{v(t)}{\rho}\vec{u}_N}$$

Moto circolare uniforme:

velocità con modulo costante:

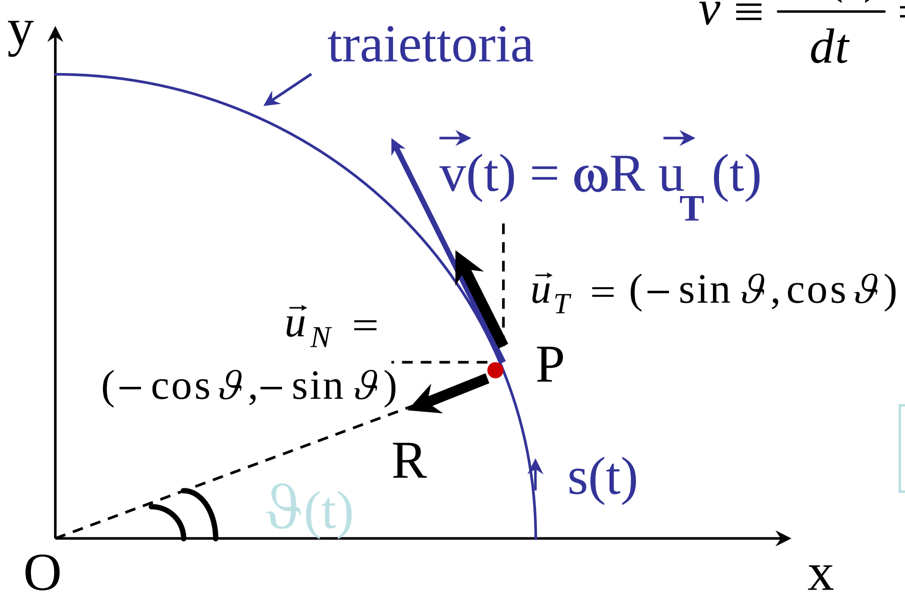
coordinata curvilinea
$s(t)=R\vartheta(t)$

$$v \equiv \frac{ds(t)}{dt} = R\frac{d\vartheta(t)}{dt} = \omega R$$

"velocità angolare"

$$\boxed{\omega \equiv \frac{d\vartheta(t)}{dt}}$$

$$\boxed{\vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega t}$$



$$x(t) = R\cos\vartheta(t) \qquad y(t) = R\sin\vartheta(t)$$

$$\Rightarrow \quad v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -R\sin\vartheta(t)\frac{d\vartheta}{dt} \equiv -R\omega\sin\vartheta(t)$$

$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = R\cos\vartheta(t)\frac{d\vartheta}{dt} \equiv R\omega\cos\vartheta(t)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t)) = R\omega\underbrace{(-\sin\vartheta(t), \cos\vartheta(t))}_{\vec{u}_T}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}(t) = R\omega\vec{u}_T(t) = v\vec{u}_T(t)}$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = -R\omega\cos\vartheta(t)\frac{d\vartheta}{dt} = -R\omega^2\cos\vartheta(t)$$

$$a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = -R\omega\sin\vartheta(t)\frac{d\vartheta}{dt} = -R\omega^2\sin\vartheta(t)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t)) = R\omega^2\underbrace{(-\cos\vartheta(t), -\sin\vartheta(t))}_{\vec{u}_N}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}(t) = R\omega^2\vec{u}_N(t) = \frac{v^2}{R}\vec{u}_N(t)}$$