Geometria - Prova scritta del 19/6/2007

(Prof. M. Spera)

1. a) Data la cicloide di equazione

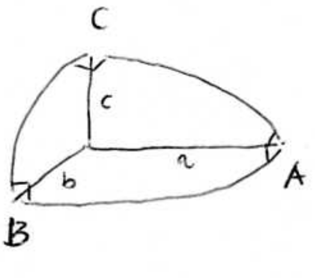
$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases} \qquad t \in (0, 2\pi)$$

e considerata la relativa superficie di rivoluzione nello spazio attorno all'asse x, si determinino le curvature principali e la curvatura gaussiana in un suo generico punto.

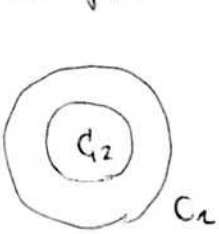
2. Data, nel semipiano superiore, la metrica

$$ds^2 = y^2 dx^2 + dy^2$$

, se ne determini la curvatura e le relative geodetiche, e si dica se la superficie (astratta) risultante è localmente isometrica al piano ordinario, alla sfera, o al piano iperbolico.

3. 

Dato l'ottante di ellissoide (triassiale: $a > b > c$) in figura, dimostrare che gli archi $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$ sono geodetiche (possibilmente in più modi), e calcolare $\iint_{ABC} K \, d\sigma$ pure in più modi.

4. 

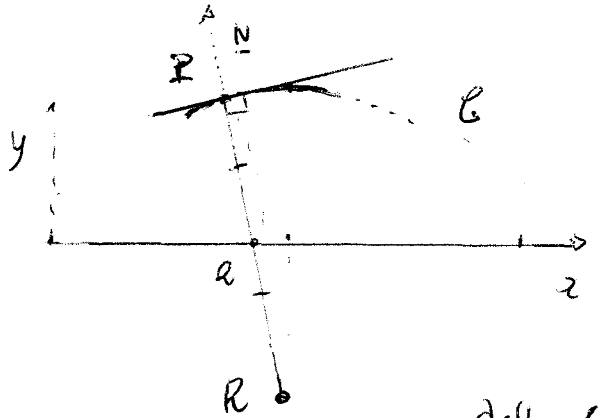
C_i: circonferenze

Si consideri lo spazio topologico $X = C_1 \cup C_2$ (topologia relativa, indotta da quella usuale del piano). Dimostrare che ogni omeomorfismo di X in sé manda una circonferenza in se stessa oppure nell'altra.

◇ ◇ ◇

N.B. svolgere 3 esercizi a scelta, di cui almeno uno tra 1 e 2. Tempo a disposizione 2h. Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

(1)



È sufficiente calcolare le grandezze richieste in un pto della cicloide di partenza, essendo queste costanti lungo i paralleli della superficie..

In generale, è noto che $k_1 \equiv$ curv. del meridiano

$= (\text{per la } \underline{\text{cicloide}} \text{ (Huygens)}) \quad \dfrac{1}{\overline{PR}} = \dfrac{1}{2\overline{PQ}}$

Inoltre $\quad k_2 = (\text{gran normale})^{-1} = \dfrac{1}{\overline{PQ}}$

$$\Rightarrow \quad K = k_1 k_2 = \frac{1}{2\overline{PQ}^2}$$

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = 1 - \cos t \\ \dot{y}(t) = \sin t \end{cases}$$

$\overline{PQ}$ si calcola subito:

★ $\underline{\text{normale}}$ a $\mathcal{C}$ in P : $\dot{x}(t)(x - x(t)) + \dot{y}(t)(y - y(t)) = 0$

$\langle \underline{r} - \underline{r}(t), \dot{\underline{r}} \rangle = 0$

$$(1-\cos t)(x - t + \sin t) + \sin t\,(y - 1 + \cos t) = 0$$

intersechiamo con l'asse x $(y=0)$ si ha

$$\cancel{(1-\cos t)}(x - t + \sin t) - \sin t\,\cancel{(1-\cos t)} = 0 \qquad t \in (0, 2\pi)$$

$$\Rightarrow \quad x - t + \cancel{\sin t} - \cancel{\sin t} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = t$$

$$\overline{PQ}^2 = \sin^2 t + (1-\cos t)^2$$
$$= \sin^2 t + 1 - 2\cos t + \cos^2 t$$
$$= 2 - 2\cos t = 2(1-\cos t)$$

$P: (t - \sin t,\ 1 - c$
$Q: (t,\ 0)$

$\overline{PQ} = \sqrt{2(1-\cos t)}$

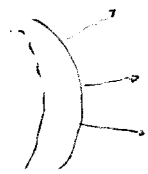
$$\overline{PR} = 2\,\overline{PQ} = 2\sqrt{2(1-\cos t)}$$

$$K = \frac{1}{2\overline{PQ}^2} = \frac{1}{4(1-\cos t)} \qquad t \in (0, 2\pi)$$

$$k_1 = -\frac{1}{2\overline{PQ}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2(1-\cos t)}}$$

$$k_2 = -\frac{1}{\overline{PQ}} = -\frac{1}{\sqrt{2(1-\cos t)}}$$

$-$: rispetto all'orientamento indicato



(2) $ds^2 = y^2 \cdot dx^2 + dy^2$ $\qquad E = y^2 \quad F = 0 \quad G = 1$

Calcoliamo $K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{E_y}{\sqrt{EG}}\right)_y = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{y}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{y}\right) =$

$= 0$ $\Rightarrow$ la sup. è localmente isometrica ad un piano (Minding). Le geodetiche saranno (immagini di) **rette**: vedi oltre.

Determiniamo le geodetiche con il metodo di Lagrange ridotto (usando l'ascissa curvilinea) $t = s$

(*) $\quad y^2 \cdot x'^2 + y'^2 = 1 \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2}[y^2 \cdot x'^2 + y'^2$

Da $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$ si ha (Lagrange) $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} = 0 \Rightarrow$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} = cost \qquad \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot 2x' = c \qquad x'y^2 = c$

Se $c = 0$ si trova $x' = 0 \Rightarrow x = a$ cost.

e $y'^2 = 1 \Rightarrow y' = \pm 1 \Rightarrow y = \pm s + b$

$$\begin{cases} x = a \\ y = \pm s + b \end{cases}$$

semirette verticali

Sia $c \neq 0 \Rightarrow x' = \frac{c}{y^2} \Rightarrow$ (sostituendo in (*))

$$y^2 \frac{c^2}{y^4} + y'^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{c^2}{y^2} + y'^2 = 1$$

$$y'^2 = 1 - \frac{c^2}{y^2} = \frac{y^2 - c^2}{y^2} \qquad y^2 > c^2$$

$$y' = \pm \frac{\sqrt{y^2 - c^2}}{y}$$

$$\int \frac{y}{\sqrt{y^2 - c^2}}\, dy = \pm \int ds = \pm s + a$$

poniamo $c = 1$, per fissare le idee

$$y = \cosh \xi \qquad dy = \sinh \xi \, d\xi \qquad y^2 - 1 = \sinh$$

$$\int \frac{\cosh \xi \cancel{\sinh \xi}\, d\xi}{\cancel{\sinh \xi}} = \int \cosh \xi \, d\xi = \sinh \xi$$

$$\sinh \xi = \pm s + a$$

$$\boxed{x'(s) = \frac{1}{y^2} = \frac{1}{\cosh^2 \xi} = \frac{1}{1 + \sinh^2 \xi} = \frac{1}{1 + (\pm s + a)^2}}$$

inverso

$$Y = \sinh \xi$$

$$Y = \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2}$$

$$e^{\xi} - 2Y - e^{-\xi} = 0$$

$$(e^{\xi})^2 - 2Y e^{\xi} - 1 = 0$$

$$e^{\xi} = Y \pm \sqrt{Y^2 + 1}$$

$-$ <u>si scarta</u> $\Rightarrow$

$$e^{\xi} = Y \pm \sqrt{Y^2 + 1}$$

$$\xi = \log\left(Y \pm \sqrt{Y^2 + 1}\right) \equiv \sinh^{-1} \xi$$

sett $\sinh \xi$

$$x'(s) = \frac{1}{1+(\pm s + a)^2} \longleftarrow \text{prendiamo } + \text{ e } a = 0$$

$$= \frac{1}{1+s^2}$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{1+s^2} \qquad dx = \frac{ds}{1+s^2}$$

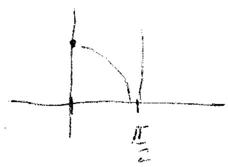
$$x = \arctan s + (\text{cost.})$$

$$y = \cosh \xi = \sqrt{1+\sinh^2 \xi} = \sqrt{1+s^2}$$

$$\begin{cases} x = \arctan s \\ y = \sqrt{1+s^2} \end{cases} \qquad s = \tan x \qquad y = \sqrt{1+(\tan x)^2} = \frac{1}{|\cos x|}$$

geodetiche:

curve del tipo $y = \sec x$



* Metodo rapido: si noti che posto $y = \rho$, $x = \varphi$ si ha $ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2$, la metrica del piano (privato dell'origine) in coordinate polari $\Rightarrow K = 0$

Le geodetiche sono allora (porzioni di) rette

Eq. retta in coord. polari: rette verticali $x = c \Rightarrow \rho \cos\varphi = c$

$y = mx + n$, $n \neq 0$ $\Rightarrow$ $\rho \sin\varphi - \rho m \cos\varphi = n$

$$\rho = \frac{n}{\sin\varphi - m\cos\varphi}$$

$y = mx$ $\quad \tan\varphi = m$

riscriviamo, per completezza, l'eq. di una retta in coordinate polari anche in modo legg. diverso

da $ax + by + c = 0$ $\quad (a,b) \neq (0,0)$

è facile vedere che possiamo riscrivere come segue

$$\langle \underline{r}, \underline{a} \rangle = \alpha$$

$\underline{a} \neq \underline{0}$
α opportuno
$\underline{a} = (a_1, a_2)$

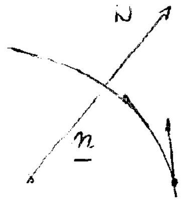
$$\underline{r} = \rho \cos\varphi \, \underline{i} + \rho \sin\varphi \, \underline{j}$$

$$\Rightarrow \quad \rho \, a_1 \cos\varphi + \rho \, a_2 \sin\varphi = \alpha$$

$$\rho \, (a_1 \cos\varphi + a_2 \sin\varphi) = \alpha$$

$$\rho = \frac{\alpha}{a_1 \cos\varphi + a_2 \sin\varphi}$$

③ Gli archi in questione si ottengono segando l'ellissoide con i piani coordinati (e questo è simmetrico rispetto ad assi)
È immediato convincersi del fatto che, su ognuno degli archi in questione, denotata con $\underline{n}$ la normale principale in un pto generico, è $\underline{n} = -\underline{N}$, sicchè $k^2 = k_n^2$ e $k_g = 0$ (1ª dim)



iii) Oppure, equivalentemente, orientati gli archi, il versore tangente $\underline{t}$ varia in un piano coordinato, sicchè

$$\underline{t}' = k\,\underline{n} = -k\,\underline{N}, \quad \text{e pertanto} \quad \frac{D}{ds}\underline{t}' = \underline{0},$$

sicchè è parallelo lungo ciascuno degli archi dati, i quali sono perciò geodetiche.

Dalla formula di Gauss $\alpha + \beta + \gamma - \pi = \iint_T K\,d\sigma$

per un triangolo geodetico, segue, nel nostro caso

$$3 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi = \iint_{ABC} K\,d\sigma \Rightarrow \iint_{ABC} K\,d\sigma = \frac{\pi}{2} \quad (1^a \text{ dim})$$

Equivalentemente, poichè l'ellissoide è omeomorfo ad una sfera, è $\frac{1}{2\pi}\iint_E K = \chi(E) = \chi(S^2) = 2$

$$\Rightarrow \iint_E K\,d\sigma = 4\pi \quad \text{e} \quad \iint_{ABC} K\,d\sigma = \frac{1}{8}\cdot 4\pi = \frac{\pi}{2}.$$

(2ª dim)

Ancora, il trasporto parallelo di un vettore inizialmente tangente ad un arco in un vertice lungo il triangolo produce, completato il circuito, un vettore ruotato di $\frac{\pi}{2}$ (e opportunamente orientato). L'asserto segue da L-C. (3ª dim)

(4) $X = C_1 \cup C_2$ è uno spazio sconnesso,

e C_1 e C_2 sono contemporaneamente

aperti e chiusi in X e, essendo essi stessi connessi

(come s. spazi), non vi sono altri sottoinsiemi di C_i

con questa proprietà, oltre a ϕ e C_i stesso

Se $\varphi : X \to X$ è un omeomorfismo,

esso manda aperti in aperti (e chiusi in chiusi)

e connessi in connessi e, pertanto

$\varphi|_{C_1} : C_1 \to X$ è tale che

$$\varphi(C_1) = \begin{cases} C_1 \\ C_2 \end{cases}$$