GEOMETRIA — Prof. M. Spera

Prova scritta del 2/7/2009

Tempo a disposizione: 2h
Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Nello spazio euclideo, sia assegnato un riferimento cartesiano.

(1) Dimostrare che $\mathcal{C}: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$ è una curva regolare; determinarne la curvatura κ e la torsione τ in un generico punto. Quindi, in O ($\in \mathcal{C}$), origine, determinare i piani principali (normale, osculatore, rettificante) nonché il raggio e il centro della sfera osculatrice.

(2) Si consideri la superficie $\Sigma: \begin{cases} x = u v \\ y = u v^2 \\ z = u v^3 \end{cases}$ $u \neq 0, v \neq 0$

(di che tipo di superficie si tratta?)
verificare che Σ è regolare e calcolarne la prima e la seconda forma fondamentale, nonché la curvatura gaussiana K. Ci si poteva aspettare a priori il risultato? Spiegare.

(3) Siano $X = \{0, 1\}$ e $\tau_1 = \{\phi, \{0,1\}\}$, $\tau_2 = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$, $\tau_3 = \{\phi, \{1\}, \{0,1\}\}$. Detti X_i, $i = 1,2,3$ gli spazi topologici risultanti (X_3 è detto spazio di Sierpinski), verificare che essi sono a due a due non omeomorfi
[Sugg. gli unici candidati ad essere omeomorfismi sono le funzioni $f: \begin{cases} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 1 \end{cases}$ e $g: \begin{cases} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 0 \end{cases}$ controllarne la bicontinuità ...]

① $\mathcal{C}: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$ (Cubica gobba)

$\underline{r} = (t, t^2, t^3)$ $\quad \underline{r} = \underline{r}(t)$ è iniettiva

$\dot{\underline{r}} = (1, 2t, 3t^2)$ $\quad \dot{\underline{r}} \neq 0$ $\quad \mathcal{C}$ è regolare

$\ddot{\underline{r}} = (0, 2, 6t)$

$\dddot{\underline{r}} = (0, 0, 6)$

Calcoliamo $\kappa = \dfrac{\|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}\|}{\|\dot{\underline{r}}\|^3}$

$\|\dot{\underline{r}}\|^2 = 1 + 4t^2 + 9t^4 \qquad \|\dot{\underline{r}}\|^3 = (1+4t^2+9t^4)^{3/2}$

$$\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix}$$

$$= \underline{i} \cdot (\underbrace{12t^2 - 6t^2}_{6t^2}) - \underline{j} \cdot 6t + \underline{k} \cdot 2$$

$$= 6t^2 \underline{i} - 6t \underline{j} + 2 \underline{k}$$

$$= 2 [3t^2 \underline{i} - 3t \underline{j} + \underline{k}]$$

$$\Rightarrow \quad \| \underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}} \| = 2\left(9t^4 + 9t^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathcal{K} = \frac{\| \underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}} \|}{\| \underline{\dot{r}} \|^3} = \frac{2\left[9t^4 + 9t^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} \; (*)}{\left(1 + 4t^2 + 9t^4\right)^{3/2} = (**)}$$

Calcoliamo $\tau = - \dfrac{\langle \underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}, \underline{\dddot{r}} \rangle}{\| \underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}} \|^2}$

$N = 12$

$$\Rightarrow \quad \tau = - \frac{12}{4\left(9t^4 + 9t^2 + 1\right)}$$

$$= - \frac{3}{\left(9t^4 + 9t^2 + 1\right)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{K}(0) &= 2 \\ \tau(0) &= -3 \end{aligned}}$$

• Piano osculatore in $O:(0,0,0)$

$$\langle \underline{r}, \underbrace{\dot{\underline{r}}_0 \times \ddot{\underline{r}}_0}_{= 2\underline{k}} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad z = 0 \quad (\text{piano } xy)$$

• Piano normale:

$$\langle \underline{r}, \underbrace{\dot{\underline{r}}_0}_{= 1\underline{i}} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad (yz)$$

• piano rettificante ... $\quad y = 0$

* Per calcolare il raggio della sfera osculatrice abbiamo bisogno di $\rho' = \dfrac{d\rho}{ds} =$

$$= \frac{d\rho}{dt}\,\frac{dt}{ds} = \frac{d\left(\frac{1}{k}\right)}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$$

$$= -\frac{1}{k^2} \cdot \dot{k} \cdot \frac{1}{\|\dot{\underline{r}}\|}$$

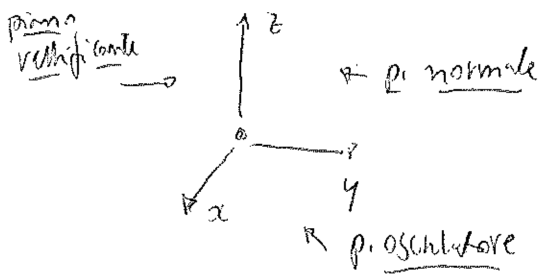
$$\left.\frac{dk}{dt}\right|_{t=0} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}\left[9t^4+9t^2+1\right]^{-\frac{1}{2}}\overbrace{\left[36t^3+36t\right]}^{\overset{\text{in } 0}{=0}}\left[**\right] - \left[*\right]\left(\frac{3}{2}\right)\left(\ \right)^{\frac{1}{2}}\overbrace{\left[8t+36t^3\right]}^{=0}}{\left(1+4t^2+9t^4\right)^3}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{k}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho'(0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad R = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\rho'}{\tau}\right)^2} = \rho = \frac{1}{k(0)} = \frac{1}{2}$$

Dai calcoli precedenti è $\quad \underline{n} = (0, \pm 1, 0)$



★ Controlliamo il segno:

$$\underline{r}'' = \frac{d}{ds}\left(\underline{r}'\right) =$$

$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{dr}{ds}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{ds}\right)\frac{dt}{ds} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\,\frac{dt}{ds}\right)\frac{dt}{ds}$$

$$= \underline{\ddot{r}}\,\frac{dt}{ds} + \underline{\dot{r}}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\|\underline{\dot{r}}\|}\right)\cdot\frac{dt}{ds}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\|\underline{\dot{r}}\|}\right) = \frac{-\frac{d}{dt}\|\underline{\dot{r}}\|}{\|\underline{\dot{r}}\|^2} = \frac{-\frac{d}{dt}\left(1+4t^2+9t^4\right)^{\frac{1}{2}}}{\|\underline{\dot{r}}\|^2} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\left(1+4t^2+9t^4\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(8t+36t^3\right)}{\|\underline{\dot{r}}\|^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\|\dot{r}\|}\right)\Bigg|_{t=0} = 0$$

$$\|\dot{r}_0\| = \frac{ds}{dt}\Big|_0 = 1$$

$$\underline{r}''(0) = \ddot{\underline{r}}(0) = k\,\underline{n}$$

$$\ddot{\underline{r}}(0) = (0,2,0) \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

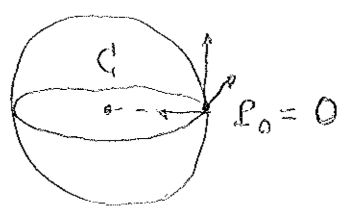
<u>come</u> già <u>trovato</u>, e $\underline{n} = (0, 1, 0)$

$\Rightarrow$ in base alla formula di de Saint-Venant

$$C_1 = \underline{P} + \rho\,\underline{n} + \frac{\rho'}{\tau}\,\underline{b} \qquad (\tau \neq 0)$$

è $\quad C_1 = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$

★ il cerchio osculatore, in questo caso, è un cerchio <u>massimo</u>



② $\Sigma : \begin{cases} x = uv \\ y = uv^2 \\ z = uv^3 \end{cases}$ $u \neq 0,\ v \neq 0$

$\underline{r} = (uv,\ uv^2,\ uv^3)$

$\underline{r}_u = (v,\ v^2,\ v^3)$

$\underline{r}_v = (u,\ 2uv,\ 3uv^2)$

È una superficie rigata

$\mathscr{C} : \begin{cases} x = v \\ y = v^2 \\ z = v^3 \end{cases}$

è una cubica gobba e funge da direttrice

$$\underline{r}_u \times \underline{r}_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ v & v^2 & v^3 \\ u & 2uv & 3uv^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}\left[3uv^4 - 2uv^4\right] - \underline{j}\left[3uv^3 - uv^3\right] + \underline{k}\left[2uv^2 - uv^2\right]$$

$$= uv^4\,\underline{i} - 2uv^3\,\underline{j} + uv^2\,\underline{k}$$

$= 0 \iff u = 0 \ \vee\ v = 0$

$\Rightarrow$ se $u \neq 0$ e $v \neq 0$, Σ è regolare

[$\underline{r} = \underline{r}(u,v)$ è iniettiva: $\begin{matrix} uv = u'v' \\ uv^2 = u'v'^2 \\ uv^3 = u'v'^3 \end{matrix}$

$\Rightarrow v' = v$, da cui $u = u'$]

$$\underline{N} = \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{\| \cdot \|}$$

$$\| \underline{r}_u \times \underline{r}_v \|^2 = u^2 v^8 + 4u^2 v^6 + u^2 v^4$$

$$= u^2 v^4 \left[1 + 4v^2 + v^4 \right]$$

$$E = \langle \underline{r}_u, \underline{r}_u \rangle = v^2 + v^4 + v^6 = v^2(1 + v^2 + v^4)$$

$$F = \langle \underline{r}_u, \underline{r}_v \rangle = uv + 2uv^3 + 3uv^5$$

$$= uv(1 + 2v^2 + 3v^4)$$

$$G = \langle \underline{r}_v, \underline{r}_v \rangle = u^2 + 4u^2v^2 + 9u^2v^4$$

$$= u^2(1 + 4v^2 + 9v^4)$$

$$\boxed{\underline{N} = \left[uv^4 \underline{i} - 2uv^3 \underline{j} + uv^2 \underline{k} \right] \frac{1}{\| \cdot \|}}$$

$$\underline{r}_{uu} = (0, 0, 0)$$

$$\underline{r}_{uv} = (1, 2v, 3v^2)$$

$$\underline{r}_{vv} = (0, 2u, 6uv)$$

$$e = 0 \qquad f = \frac{uv^4 - 4uv^4 + 3uv^4}{\cdot} = 0$$

non necessario per calcolare K: è già $= 0$

$$g = \frac{-4u^2v^3 + 6u^2v^3}{\cdot} = \frac{2u^2v^3}{\sqrt{u^2v^4(1+4v^2+v^4)}}$$

$$\xrightarrow{(u>0)} = \frac{2u^2v^3}{uv^2\sqrt{}} = \frac{2uv}{\sqrt{1+4v^2+v^4}}$$

$$\Downarrow$$

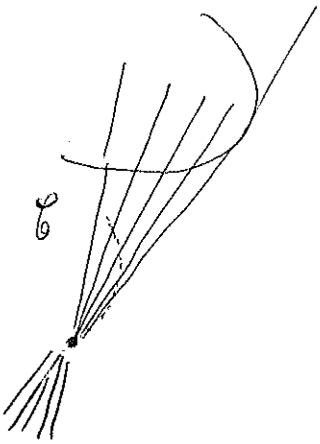
$$K = eg - f^2 = 0$$

Il risultato era prevedibile!!

Geometricamente Σ è un <u>cono</u>$^{(+)}$ con vertice nell'origine

che ha curvatura nulla

(rigata svi<u>lu</u>ppa<u>bi</u>le)



(+) porzione di cono:
[$\mathcal{C}$ passa per O, che però è stato escluso da Σ

③ $X_i = (X, \tau_i)$, $X = \{0,1\}$

$\tau_1 = \{\emptyset, \{0,1\}\}$

top. banale

$\tau_2 = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

top. discreta

$\tau_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$

top. di Sierpiński

Candidati ad essere omeomorfismi

$f = i$ (identità) $i^{-1} = i$

$g: \begin{array}{l} 0 \longmapsto 1 \\ 1 \longmapsto 0 \end{array}$

$g^{-1} = g$

gli X_i sono a due a due non omeomorfi:

$X_1 \not\approx X_2$: $\quad \underset{\in \tau_2}{f^{-1}(\{1\})}\ (= f\{1\}) = \underset{\notin \tau_1}{\{1\}}$

$g^{-1}\{0\} = \{1\} \notin \tau_1$

$X_1 \not\approx X_3$ --- idem

$X_2 \not\approx X_3$

$f^{-1}\underset{\in \tau_2}{\{0\}} = \underset{\notin \tau_3}{\{0\}}$

$g^{-1}\underset{\in \tau_2}{\{1\}} = \underset{\notin \tau_3}{\{0\}}$