Foglio di esercizi su principio di induzione e numeri complessi

Sansonetto Nicola*

Esercizio 1 (Punti 5)**.** Si dimostri per induzione che $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2 (Punti 5)**.** Si dimostri per induzione che $4^n \geq 1 + 3n$ per ogni intero $n \geq 1$.

Esercizio 3 (Punti 6)**.**

1. Si scriva $\frac{4+i}{3-2\,i}$ in forma algebrica.
2. Si scriva $\frac{1+i}{3}$ in forma trigonometrica.
3. Si calcoli $(\frac{1+i}{3})^4$.

Esercizio 4 (Punti 6)**.** Si disegnino nel piano cartesiano i punti z_1, z_2, z_3 corrispondenti alle soluzioni dell'equazione

$$z^3 - 8i = 0.$$

Esercizio 5 (Punti 4+2)**.** ☻ Si consideri il polinomio

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

a coefficienti e variabile complessi.

1. Tenendo conto del teorema fondamentale dell'algebra, si dimostri che si può sempre scomporre il polinomio $P(z)$ in fattori di primo grado sui complessi, cioè che esistono n numeri complessi $z_1, \ldots, z_n$ tali che

$$P(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$$

   (*Suggerimento: ricordarsi del teorema di Ruffini.*)

2. Dedurre che se $P(z)$ è un polinomio a coefficienti reali, allora $P(z)$ si può scomporre in fattori di primo e secondo grado sui reali.

N.B.
Il simbolo ☻ denota esercizi giudicati **difficile**.

*e-mail: nicola.sansonetto@gmail.com