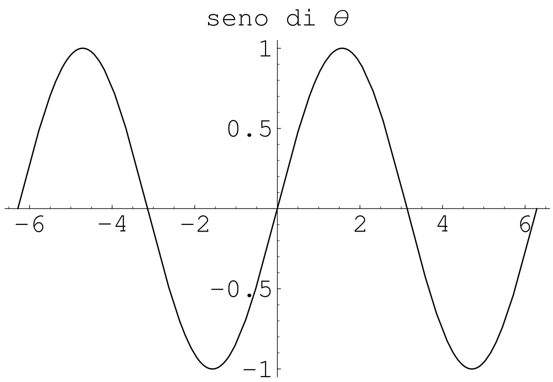
CENNI DI TRIGONOMETRIA

1 Seno

Consideriamo una circonferenza $\mathcal{C}$ e fissiamo un sistema di riferimento cartesiano in modo che la circonferenza $\mathcal{C}$ sia centrata nell'origine degli assi e abbia raggio 1. Dall'origine degli assi facciamo partire una semiretta s che forma un'angolo orientato θ con l'asse delle ascisse. Scegliamo come verso positivo di rotazione degli angoli, il verso antiorario. Sia P il punto di intersezione di tale semiretta con la circonferenza $\mathcal{C}$, quindi $|OP| = 1$.
Diciamo seno dell'angolo θ e lo indichiamo con $\sin\theta$ la coordinata y del punto P intersezione della circonferenza $\mathcal{C}$ con la semiretta s. È immediato notare alcuni valori di $\sin\theta$, come riassunto nella tabella 1. Possiamo ora

angolo	valore seno
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1

disegnare il grafico del seno, in un riferimento cartesiano in cui l'angolo θ funge da variabile indipendente. Notiamo che essendo l'angolo θ un angolo orientato, ha senso assegnare valori negativi a θ. Ha senso inoltre, assegnare a θ anche valori maggiori dell'angolo giro 2π (o minori -2π, rispettivamente), considerando il fatto che θ e $\theta + 2\pi$ individuano lo stesso angolo da un punto di vista geometrico, ma sono due numeri reali distinti. In questo modo si conta la periodicità dell'angolo. Possiamo costruire il grafico per punti, in base alla tabella 1:



2 Coseno

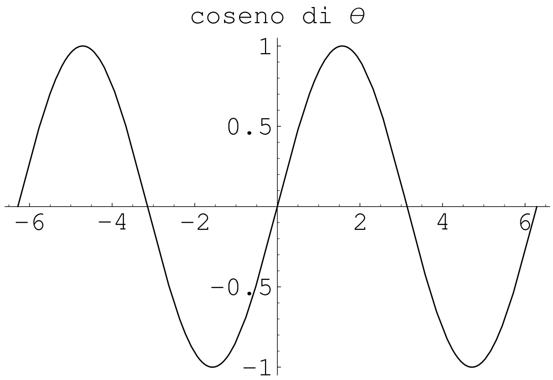
Usando il teorema di Pitagora si nota immediatamente che:

$$X^2 = 1 - \sin^2\theta \tag{1}$$

In questo modo è naturale definire la funzione coseno dell'angolo θ, denotata $\cos\theta$, il cui quadrato soddisfa la relazione 1. Il coseno si può definire analogamente al seno, come la coordinata x del punto P. È immediato notare alcuni valori di $\cos\theta$, come riassunto nella tabella 2. Analogamente al seno, determiniamo il grafico del

angolo	valore coseno
0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0

coseno:



3 Alcune proprietà del seno e del coseno

3.1 Indentità trigonometriche

È semplice verificare alcune relazioni del seno e del coseno dalla loro definizione. Per verificare tali proprietà può essere utile effettuare un disegno di ciò che si sta considerando.

$$\begin{gathered}
\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta) \\
\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta) \\[1ex]
\sin(\theta + \pi) = \sin(\theta) \\
\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta) \\
\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta) \\
\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin(\theta)
\end{gathered} \tag{2}$$

3.2 Formule di addizione

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha\end{aligned} \tag{3}$$

Assumendo la validità della prima, ad esempio, le rimanenti si ricavano da essa e dalle 2.

3.3 Formule di duplicazione

$$\begin{aligned}&\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta\\ &\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta\end{aligned} \tag{4}$$

3.4 Formule di bisezione

$$\begin{aligned}|\cos\frac{\theta}{2}| &= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}\\ |\sin\frac{\theta}{2}| &= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}\end{aligned} \tag{5}$$

3.5 Formule di prostaferesi

$$\begin{aligned}\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\ \cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\ \sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\ \sin\alpha - \sin\beta &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\end{aligned} \tag{6}$$

4 Tangente

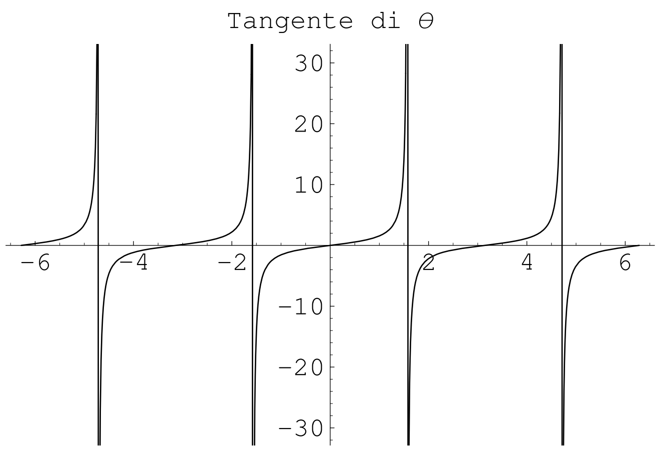
Definiamo in maniera algebrica la funzione tangente. Consideriamo i valori dell'angolo θ, in modo che il coseno non sia nullo ($\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$). Definiamo tangente dell'angolo θ, indicata con $\tan\theta$ il rappoeto tra il seno e il coseno:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \tag{7}$$

È immediato ricavare alcuni valori notevoli della tangente a partire da quelli del seno e del coseno (si veda la tabella 4):

angolo	valore coseno
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	non esite
π	0
$\frac{3\pi}{4}$	-1

A partire dal grafico del seno e del coseno (effettuando il quoziente dei grafici punto per punto) oppure per punti si ricava il grafico della tangente:



5 Cotangente

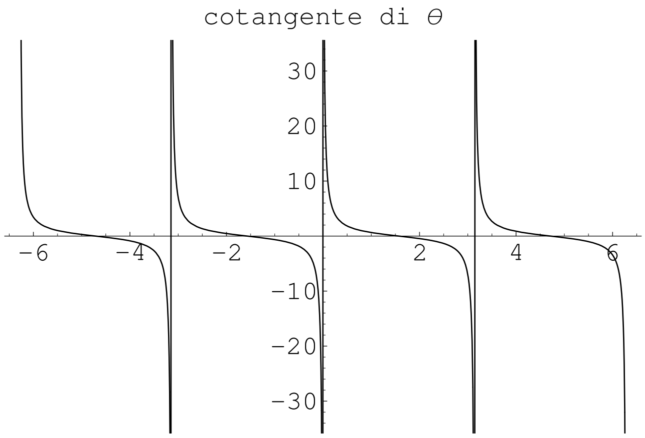
Similmente a quanto fatto per la tangente dell'angolo θ, definiamo algebricamente la cotangente dell'angolo θ. Consideriamo quei valori dell'angolo tali per cui il seno sia non nullo e cioè $\theta \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$:

$$\text{cotan}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \tag{8}$$

È semplice verificare che la cotangente è il reciproco della tangente, cioè $\text{cotan}\theta = \frac{1}{\tan\theta}$. A partire dal grafico del coseno e del seno oppure per punti si ricava il grafico della cotangente:

6 Alcune proprietà della tangente e della cotangente

Le proprietà fondamentali della tangente e della cotangente sono elencate di seguito. Sono facilmente ottenibilii da quelle del seno e del coseno oppure direttamente dalla definizione.



Riferimenti bibliografici

[1] G. de Marco, *Analisi zero.* Decibel-Zanichelli, Padova 1981.