Correzione del compito

12 Settembre 2006

Esercizio 1. Si consideri la seguente relazione sull'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi.

$$R = \{ ((a, b) : a, b \in \mathbb{Z}, a + 5b \text{ è multiplo di } 6\}.$$

Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza. Trovare la classe d'equivalenza di $[0]_R$ e $[6]_R$. Quante sono le classi d'equivalenza individuate da R?

Soluzione: mostriamo che la relazione R è di equivalenza.

1. • *Proprietà riflessiva*
   Sia $a \in \mathbb{Z}$, allora $(a, a) \in R$, infatti $a + 5a = 6a$ che è multiplo di 6.
   • *Proprietà simmetrica*
   Sia $(a, b) \in R$ cioè esiste un $w \in \mathbb{Z}$ tale che $a + 5b = 6w$. Consideriamo questa relazione e moltiplichiamo ambo i membri per 5, ottenendo $5a + 25b = 30w$, cioè $5a + b + 24b = 30w$ e quindi $5a + b = 6(5w - 4b)$. Di conseguenza $5a + b$ è multiplo di 6.
   • *Proprietà transitiva*
   Siano (a, b), $(b, c) \in R$, cioè esistono $w, v \in \mathbb{Z}$ tali che $a + 5b = 6w$ e $b + 5c = 6v$. Sommando tali espressioni membro a membro si ha che $a + 5c = 6(w + v - b)$ e quindi $(a, c) \in R$.

2. La classe di equivalenza di 0 è $[0]_R = \{a \in \mathbb{Z} \mid 0 + 5a \, \text{è multiplo di} 6\}$ cioè quando a stesso è multiplo di 6. $[0]_R$ è formata quindi, dalle dagli elementi del tipo $6a$, con $a \in \mathbb{Z}$.

3. La classe di equivalenza di 6 è $[6]_R = \{a \in \mathbb{Z} \mid 6 + 5a \;\text{ è multiplo di } 6\}$ cioè quando a stesso è multiplo di 6. E' esattamente la classe di $[0]_R$ perchè la relazione diventa semplicemente $0 + 5a = 6(w - 1)$

4. Chi sono le rimanenti classi d'equivalenza?

Esercizio 2. Mostrare che $R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6)\}$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{1,2,3,4,5,6\}$. Determinare gli elementi massimali, minimali, eventuali massimo, minimo, maggioranti, minoranti, estremo superiore o estremo inferiore del sottoinsieme $\{2,3,4\}$.

Soluzione: mostriamo che la relazione R è di ordine stretto.

1. • *Proprietà antiriflessiva*
   R è antiriflessiva, poichè non abbiamo nessuna coppia del tipo (x,x) nell'elenco proposto.
   • *Proprietà transitiva*
   R è transitiva, ad esempio $(3,4),(4,6) \to (3,6)$, $(1,3),(3,5) \to (1,5)$.
   Quindi R è relazione di ordine stretto.

2.

massimale	$\{2;4\}$	minimale	$\{2;3\}$
maggioranti	$\emptyset$	minoranti	$\{1\}$
sup	$\emptyset$	inf	$\{1\}$
max	$\emptyset$	min	$\emptyset$

Esercizio 3. Dimostrare per induzione che, per $n \geq 0$,

$$\Sigma_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

.

Soluzione:

1. *Passo base*: prestiamo attenzione al primo termine che non puó corrispondere a $i = 0$, per il resto la soluzione é conosciuta perché é la somma dei primi n numeri naturali
   $\sum_{i=1}^{1}(i-1) = 0$ e $\frac{1(1-1)}{2} = 0$.

2. *Passo induttivo.*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(i-1) &= \sum_{i=1}^{n}(i-1) + ((n+1)-1) \\
&= \frac{n(n-1)}{2} + n \\
&= \frac{n^2 - n + 2n}{2} \\
&= \frac{n^2 + n}{2} = \frac{(n+1)n}{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 4. Si dica, giustificando la risposta, se gli insiemi $3\mathbb{N} \cup \{\pi, 5, \frac{1}{7}\}$ e $2\mathbb{N} \setminus \{2, 6\}$ hanno la stessa cardinalità. (Nota: con $3\mathbb{N}$ denotiamo l'insieme dei numeri naturali multipli di 3 e con $2\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali multipli di 2.)

Soluzione: per dimostrare che $3\mathbb{N} \cup \{\pi, 5, \frac{1}{7}\}$ e $2\mathbb{N} \setminus \{2, 6\}$ hanno la stessa cardinalità esibiamo una biiezione tre di essi. La funzione $f : 3\mathbb{N} \cup \{\pi, 5, \frac{1}{7}\} \longrightarrow 2\mathbb{N} \setminus \{2, 6\}$, defnita come segue

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n = \pi \\ 4, & n = 5 \\ 4, & n = \dfrac{1}{7} \\ \dfrac{2}{3}n + 8, & n \geq 3 \end{cases}$$

è una possibile biiezione di $3\mathbb{N} \cup \{\pi, 5, \frac{1}{7}\}$ in $2\mathbb{N} \setminus \{2, 6\}$. Occorre ovviamente ricordare al lettore che gli elementi di $3\mathbb{N}$ sono tutti multipli di 3...

Esercizio 5. Si risponda alle seguenti domande:

1. Quando un insieme si dice numerabile?
2. L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi é numerabile? Perché?
3. L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi é numerabile? Perché?

Soluzione: si vedano le dispense.

Esercizio 6. Si consideri la struttura $\mathfrak{N}$, che ha come insieme universo l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali,come relazioni l'uguaglianza e il minore,come funzioni la somma, la moltiplicazione e il successore, come costanti i numeri 0 e 1. Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio adatto alla struttura i cui simboli propri siano i predicati $=$, $<$; i simboli per funzione $+$ e $\times$, e $\mathbf{s}$, i simboli per costante $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$.

Nel linguaggio $\mathcal{L}$ si scriva una formula $\varphi(v_0, v_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(v_0, v_1)[a, b]$ se e solo se il prodotto di a e b è multiplo di 4 e $a - b$ è multiplo di 3 e maggiore di 2.

Soluzione: costruiamo per gradi le varie proposizioni e poi mettiamole assieme, assegnando, ovviamente alla variabile v_0 il valore a e v_1 il valore b.

1. "il prodotto di a e b è multiplo di 4" diventa
$$\exists v_2 = \times v_0 v_1 \times v_2 + + + 1111$$
2. "$a - b$ é multiplo di 3" diventa
$$\exists v_3 = v_0 + v_1 \times v_3 + +111$$
3. infine "$a - b$ é maggiore di 2" diventa semplicemente
$$< v_0 + v_1 + 11$$

Adesso non resta che metterle assieme con gli opportuni connettivi...

$$\wedge \wedge \exists v_2 = \times v_0 v_1 \times v_2 + + + 1111 \exists v_3 = v_0 + v_1 \times v_3 + +111 < v_0 + v_1 + 11$$

Esercizio 7. Dire che cosa significa che una formula φ è soddisfacente. Dire cosa significa che la formula φ è conseguenza logica di un insieme di formule Φ. Dimostrare che, per ogni scelta delle formule γ e β,

$$\{\gamma\} \models \rightarrow \wedge\gamma\beta\beta$$

Soluzione: si vedano le dispense.

Esercizio 8. In un linguaggio in cui è un simbolo di relazione binaria Q e un simbolo di funzione unaria f, dire quali delle seguenti successioni di simboli sono formule (F), quali termini (T) e quali nulla (N); in quest'ultimo caso scrivere nell'ultima colonna una breve giustificazione.

	F	T	N	
$fffv_0v_3$			$\times$	fè unaria
$\neg Qfffv_0v_3$	$\times$			
$\neg Qfv_0ffv_1Qv_2v_1$			$\times$	manca un connettivo
$\wedge Qv_0fv_1\forall v_0fv_1$			$\times$	fè termine e dopo una variabile...
$\wedge Qfv_0fv_1\neg\forall Qv_1fffv_1$			$\times$	dopo i quantificatori ci vuole una variabile
$\neg \rightarrow \wedge Qv_0fv_1v_2\forall v_1Qv_1fv_0$			$\times$	fé unaria
$\wedge \rightarrow \neg\forall v_2Qv_2v_0\neg Qfv_0v_1\forall v_1Qfv_1v_2$	$\times$			

Esercizio 9. Dato l'insieme di coppie ordinate

$$\begin{aligned} g = &\{(x, x^2+1) : x \in \mathbb{N}, x^2-2 < 7\} \cup \\ &\cup \{(x,5) : x \in \mathbb{N}, 1 < x \leq 3\} \cup \\ &\cup \{(x, x-1) : x \in \mathbb{N}, x \geq 4\} \cup \{(3,5),(7,6)\}, \end{aligned}$$

motivare perché g è una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$, precisando se è totale, suriettiva, iniettiva o biiettiva, giustificando le risposte.

Data poi la funzione $f = \{(1,0),(3,2),(5,1)\}$, scrivere quali sono le funzioni $h = f(g)$ e $k = g(f)$.Le funzioni $h = f(g)$ e $k = g(f)$ sono iniettive?

Soluzione: scriviamo esplicitamente le coppie di g, spaccandole nei suoi intervalli:

$$\begin{aligned} g = \{&(0,1),(1,2),(2,5)\} \cup \\ &\cup \{(2,5),(3,5)\} \cup \\ &\cup \{(4,3),(5,4),(6,5),(7,6),(8,7),\ldots\} \cup \\ &\cup \{(3,5),(7,6)\} \end{aligned}$$

g è funzione totale, poichè è rispettata la proprietà di univocità e il dominio coincide con l'insieme di definizione. g non è suriettiva, poichè 0 non è immagine di alcun elemento dell'insieme di definizione, anche se potremmo toglierlo. g non è iniettiva, dal momento che 5 è immagine di 2, di 3 e di 6.
Vediamo la composizione con la funzione $f = \{(1,0),(3,2),(5,1)\}$
$Def(f) = \{1,3,5\}$, $Im(h) = \{0,2,1\}$.f è iniettiva.
Componiamo: $f \circ g = \{(0,0),(4,2),(2,1),(3,1),(6,1)\}$
che assolutamente non é iniettiva...
$g \circ f = \{(1,1),(3,5),(5,2)\}$

Esercizio 10. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ \frac{-x^2}{4} & 0 \leq x \end{cases}$$

Dire se f é una funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, e in caso positivo, dire se f é totale, iniettiva o suriettiva. Esiste la funzione inversa di f? In caso affermativo, trovare f^{-1}

Soluzione: f è una funzione, in quanto soddisfa la proprietà di univocità. In punto critico da controllare è $x = 0$, e quindi si deve verificare che $0^2 = \frac{-0^2}{4}$, che è ovviamente vero. Riscriviamo la funzione senza ambiguità come:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ \frac{-x^2}{4} & x > 0 \end{cases}$$

La funzione f è totale perchè è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Per verificare se la funzione è iniettiva, dobbiamo verificare che se $f(x_1) = f(x_2)$, allora $x_1 = x_2$. Consideriamo i seguenti casi:

$x_1 \leq 0$, $x_2 \leq 0$; allora $f(x_1) = f(x_2)$ significa $x_1^2 = x_2^2$, e quindi $x_1 = x_2$ (Attenzione: possiamo concludere in questo modo solo perchè x_1 e x_2 sono entrambi minori o uguali a zero!)

$x_1 > 0$, $x_2 > 0$; allora $f(x_1) = f(x_2)$ significa $\frac{-x_1^2}{4} = \frac{-x_2^2}{4}$, da cui si conclude $x_1 = x_2$. (Attenzione: possiamo concludere in questo modo solo perchè x_1 e x_2 sono entrambi maggiori di zero!)

$x_1 > 0$,$x_2 \leq 0$; questo caso non può mai verificarsi, poiché $f(x_1) = x_1^2$ è sempre strettamente positivo, mentre $f(x_2) = \frac{-x_2^2}{4}$ è sempre negativo.

In tutti i casi che hanno senso, abbiamo concluso che $x_1 = x_2$, quindi la funzione è iniettiva.

Inoltre la funzione è anche suriettiva: infatti, se $y \geq 0$, $y = x^2$, dove $x = -\sqrt{y}$, mentre se $y < 0$, $y = \frac{-x^2}{4}$, dove $x = \sqrt{-4y}$. Abbiamo così verificato che ogni $y \in \mathbb{R}$ appartiene all'immagine di f, quidni f è suriettiva.

Essendo f iniettiva, possiamo calcolare l'inversa. Abbiamo già osservato che, se $y \geq 0$, $y = x^2$ con $x \leq 0$; esplicitando la x, otteniamo $x = -\sqrt{y}$ (Attenzione: la scelta del segno della radice dipende dal fatto che $x \leq 0$!). Se $y < 0$, $y = \frac{-x^2}{4}$ con $x > 0$; esplicitando la x otteniamo $x = \sqrt{-4y}$ (Attenzione: la scelta del segno della radice dipende dal fatto che $x > 0$!). Pertanto

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} -\sqrt{y} & y \geq 0 \\ \sqrt{-4y} & y < 0 \end{cases}$$