Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 5 settembre 2000

E1. Si consideri al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$ la famiglia di applicazioni lineari $T_\lambda : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^{\leq 2}[x]$ così definite:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto (a+b)x + \lambda(c+d)x^2$$

i) Si scriva la matrice di T_λ rispetto alle basi canoniche dei due spazi in questione.
ii) Determinare, al variare di λ, una base di $Ker\, T_\lambda$ e una base di $Im\, T_\lambda$.
iii) Posto $\lambda = 1$, $T := T_1$ e detto P_μ il polinomio $P_\mu(x) = \mu + x + \mu x^2$, determinare, al variare di $\mu \in \mathbf{R}$, la sua controimmagine tramite T, ovvero $T^{-1}\{P_\mu\}$.
iv) Posto $S := \cup_{\mu \in \mathbf{R}} T^{-1}\{P_\mu\}$, si determini una base di $< S >$ e una di $< S >^\perp$ (rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbf{R}^4$.

E2. i) Determinare, nel piano euclideo reale $\mathbf{E}^2$, in cui è fissato un riferimento cartesiano, l'equazione dell'iperbole $\mathcal{I}$ tangente alle rette $r : x = 2$, $r' : x = -2$ rispettivamente nei punti $P_1 : (2,1)$ e $P_2 : (-2,-1)$ e avente un asintoto a di direzione $W :< (1,1)^t >$. **Sugg.** Costruire un opportuno fascio di coniche in $\mathbf{P}^2$ osservando che r e r' sono parallele e che pertanto la retta P_1P_2 è ...
ii) Determinare l'altro asintoto di $\mathcal{I}$.
iii) Determinare la forma canonica metrica di $\mathcal{I}$ e le equazioni cartesiane degli assi.
iv) Determinare l'asse focale e abbozzare il grafico di $\mathcal{I}$ (la sua costruzione passo passo aiuta molto).

T1. i) Dare la definizione generale di spazio affine e fornire possibilmente almeno due esempi.
ii) Dare la definizione di sottospazio affine di uno spazio affine dato, e dire che cosa si intende con l'affermare che due sottospazi affini sono 1) incidenti, 2) paralleli.
iii) Enunciare e dimostrare, sia in forma geometrica (vettoriale) che in forma matriciale, il *teorema di Rouchè-Capelli*.

T2. i) Dare la definizione di forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale (di dimensione finita) e definire la nozione di ortogonalità rispetto a tale forma.
ii) Dare la definizione di vettore isotropo.
iii) Dare la definizione di congruenza per matrici simmetriche, e collegarla alle forme bilineari simmetriche.
iv) Enunciare e dimostrare il teorema di diagonalizzazione per forme bilineari simmetriche in generale e interpretarlo in termini di congruenza.
v) Quali invarianti completi per congruenza si hanno nel caso reale e nel caso complesso, rispettivamente?
vi) Si giustifichi la risposta nel primo caso.

F. (facoltativo: se ne tiene conto solo nel caso in cui l'esaminando abbia risposto interamente ai quesiti precedenti).

Sia data una parabola $\mathcal{P}$ nel piano euclideo reale (ampliato proiettivamente). Detti F il suo fuoco, δ la sua direttrice, di direzione $=: D_\infty$, H il punto di intersezione dell'asse di $\mathcal{P}$ e della direttrice, si dimostri che il "triangolo" $FD_\infty H$ è autopolare.

Tempo a disposizione 2h.30m
Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

Geometria 5/9/2000

(1) Sia $T_\lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$

$$T_\lambda : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \longmapsto (a+b)x + \lambda(c+d)x^2$$

e, f basi canoniche

1) Det. $m_{ef}(T_\lambda)$

2) Det, al variare di λ, una base di $Ker\, T_\lambda$ e una di $Im\, T_\lambda$

3) Posto $\lambda = 1$ e $P_\mu(x) := \mu + x + \mu x^2$, e $T_1 \equiv T$ determinare, al variare di μ,

$$T^{-1} P_\mu$$

4) Posto $S = \bigcup_\mu T^{-1} P_\mu$

Si trovi una base ortonormale di $< S >$ e una di $< S >^\perp$ (rispetto al pr. scalare standard in $\mathbb{R}^4$)

Sol. 1)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\rho(T_\lambda) = 2$ se $\lambda \neq 0$ $\quad \nu(T_\lambda) = 2 = 4-2$

$\rho(T_\lambda) = 1$ se $\lambda = 0$ $\quad \nu(T_\lambda) = 3 = 4-1$

1° caso $\lambda \neq 0$

base di $\ker T_\lambda$

$a+b=0$ $\quad b=-a$ $\quad$ a, c liberi

$c+d=0$ $\quad d=-c$

$$\ker T_\lambda = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$

base di $\operatorname{Im} T_\lambda$: (x, x^2) $\quad \operatorname{Im} T_\lambda = \langle x, x^2 \rangle$

$\lambda \neq 0$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

2° caso $\lambda = 0$

$a+b=0$ $\quad b=-a$ $\quad$, a, c, d arb.

$$\text{b. } \ker T_0 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\operatorname{Im} T_0 = \langle x \rangle \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Sia $\lambda = 1$: $\quad T : \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \mapsto (a+b)x + (c+d)x^2$

$P_\mu \in \operatorname{Im} T \iff \mu + x + \mu x^2 = (a+b)x + (c+d)x^2 \quad (\forall x)$

$\Rightarrow \mu = 0 \qquad a+b=1$

$c+d=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = a \\ b = 1-a \\ c = c \\ d = -c \end{cases}$$

$$T^{-1}\{P_\mu\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \mu \neq 0 \\ \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{v_0 \text{ sol. particolare}} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \end{cases}$$

base di $\ker T$

$\| \quad v_0 + \ker T$ (giacitura)

$\Rightarrow \mathcal{S} = T^{-1}\{P_0\}$

base

$$\langle S \rangle = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle =$$

base ortog.: $$\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \right\rangle$$

ortog.

$$\langle \mathcal{S} \rangle^\perp = \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

Geometria 5/9/2000

(2) Determinare l'iperbole $\mathcal{I}$ tangente alle rette $r: x = 2$, $r': x = -2$ risp. nei punti $P_1: (2,1)$, $P_2: (-2,-1)$ e avente un asintoto di direzione $W: \langle (1,1)^t \rangle$. Si determini l'altro asintoto, la forma canonica metrica, e le equazioni degli assi, nonché l'asse focale.

Sol. r e r' (sono //) hanno la dir. del diametro coniugato alla retta $s: P_1P_2: \; y = \frac{1}{2}x$

$O: (0,0)$ è il centro di $\mathcal{I}$.

Possiamo subito scrivere (coordinate di $\mathbb{P}^2$)

$$(\underbrace{x_1 - 2x_0}_{r})(\underbrace{x_1 + 2x_0}_{r'}) + \lambda(\underbrace{2x_2 - x_1}_{s})^2 = 0$$

ovvero, affinemente

$$(x-2)(x+2) + \lambda(2y-x)^2 = 0$$

$$x^2 - 4 + \lambda(2y-x)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 4 + \lambda x^2 - 4\lambda xy + 4\lambda y^2 = 0$$

$$(1+\lambda)x^2 - 4\lambda xy + 4\lambda y^2 - 4 = 0$$

posto $y = mx$ e $x = 1$,

si ha che $m = 1$ deve essere radice di

$$\left[(1+\lambda) - 4\lambda m + 4\lambda m^2 = 0\right]$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \lambda - 4\lambda + 4\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1$$

$\Rightarrow$ l'iperbole ha la forma

$$-4y^2 + 4xy - 4 = 0$$

$$\boxed{y^2 - xy + 1 = 0}$$

l'altro asintoto ha eq. (da $y^2 - xy = 0$

$\Rightarrow \; y(y-x) = 0$) $\quad y = 0$ (è l'asse x

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$a = \det A = -\frac{1}{4}$ $\quad \mathcal{J} = 1$ $\quad a_{00} = -\frac{1}{4}$ (iperbole)

$$t^2 + \frac{a_{00}\, y}{a}\, t + \frac{a_{00}^{\,3}}{a^2} = 0$$

$$t^2 + t + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^3}{\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = 0$$

$$t^2 + t - \frac{1}{4} = 0$$

$$4t^2 + 4t - 1 = 0$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{4} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2} \qquad \frac{1}{\alpha} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{1}{\beta} = \frac{-1-\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{b^2}$$

$$a = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}-1}} = \sqrt{\frac{2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}} = \sqrt{\frac{2(\sqrt{2}+1)}{3}}$$

$$b = \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2(1-\sqrt{2})}{1-2}} = \sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$$

Dir. assi $\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - \frac{1}{4} = 0$

$$-\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0 \qquad 4\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{4} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2} \equiv \lambda_\pm$$

(controllo: $\frac{1}{\alpha} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} = -\lambda_- > 0$

legato all'asse focale $\frac{1}{\beta} = \frac{-1-\sqrt{2}}{2} = -\lambda_+ < 0$

$\therefore \left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} \text{ or } \lambda\right)$

Dir. assi es. λ_+ (l'altra è $\perp$)
(vedi anche pag 9)

$$\begin{pmatrix} -\lambda_+ & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(basta la 1ª eq:) $\quad -\lambda_+ x - \frac{1}{2} y = 0$

$$y = -2\lambda_+ x = -(1+\sqrt{2})\, x$$

è già l'eq di un asse poiché $C \equiv (0,0)$

l'altra dir: $y = \frac{1}{1+\sqrt{2}}\, x = \frac{\sqrt{2}-1}{1}\, x = (\sqrt{2}-1)\, x$

☆ l'asse focale corr a $\frac{1}{\alpha} \sim \lambda_-$: $y = (\sqrt{2}-1)\, x$
$\sim 0{,}414$

☆ Altro metodo $\quad d: x=0 \quad e \quad d': y=\frac{1}{2}x$

sono diametri coniugati: l'eq. è

$$\lambda x^2 + \mu\left(y-\frac{1}{2}x\right)^2 = 1$$

(con λ, μ: opposti, di segno opposto.

il passaggio per P_1 (o P_2) dà

$$4\lambda + 0 = 1 \Rightarrow \lambda = +\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ l'eq è $\quad +x^2 - 4\mu\left(y-\frac{1}{2}x\right)^2 - 4 = 0$

$\times(-4)$

la parte quadratica è che ug. a zero dà le dir. degli asintoti è:

$$x^2 - \mu x^2 + 4\mu xy - 4\mu y^2 = 0$$

Deve essere $\quad 1-\mu+4\mu-4\mu=0$

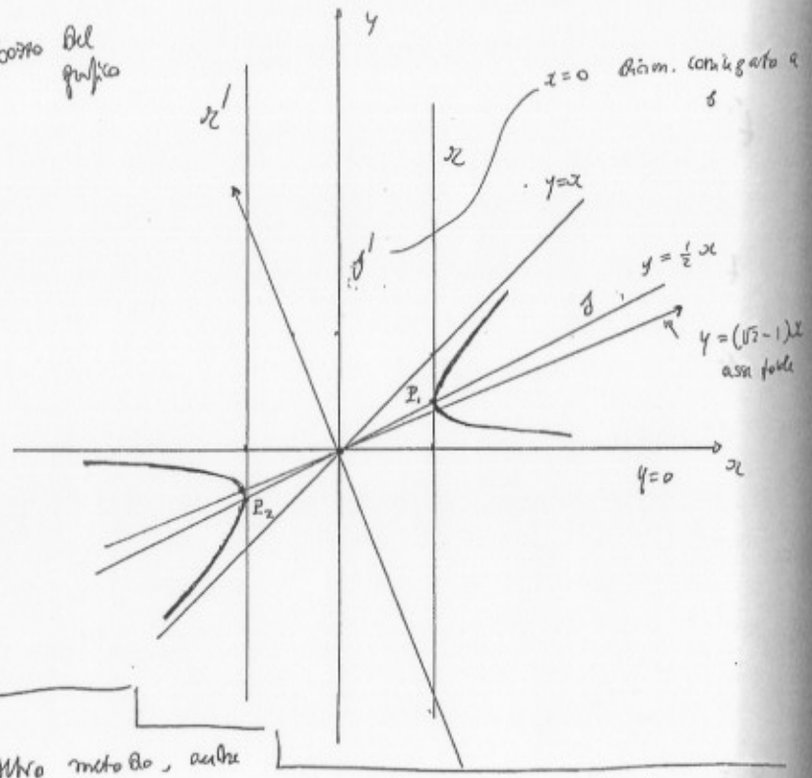
$$\Rightarrow \mu = 1$$

$\Rightarrow$ I $\quad 4xy - 4y^2 + 4 = 0$

(i termini di 1° grado svanisco)

$$\boxed{y^2 - xy + 1 = 0} \quad \text{OK!}$$

abbozzo del grafico



☆ Altro metodo, anche più rapido per le dir. degli assi: si impongono diam coniugati ortogonali

$$(-m,\ 1)\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ovvero} \quad (-m\ \ 1)\begin{pmatrix} -\frac{m}{2} \\ -\frac{1}{2}+m \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{m^2}{2} - \frac{1}{2} + m = 0 \qquad m^2 + 2m - 1 = 0 \qquad m = -1 \pm \sqrt{1+1}$$

$$\boxed{m = -1 \pm \sqrt{2}}$$

ovviamente compatibile col calcolo precedente

★ oppure: bisettrici degli asintoti

F Geometria 5/9/2000

Il triangolo FHD_∞ è autopolare:

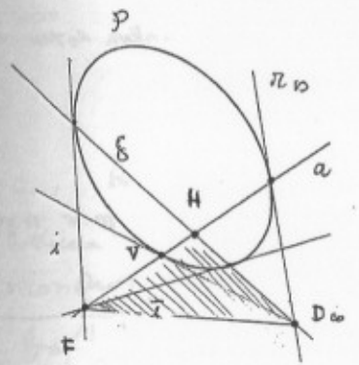
infatti δ è la polare di F

$D_\infty \in \delta$ (è il suo pto improprio)

La polare di D_∞ passa per F e per il pto improprio della parabola(*) (per le proprietà della polare), e dunque è l'asse a della parabola. Il terzo vertice è allora $\delta \cap a = H$

(*) È il centro di $\mathcal{P}$

$\mathbb{E}^2(\mathbb{C})$



Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 19 settembre 2000

E1. i) Determinare il vettore $w_4 = (x, y, z, t)^t \in \mathbf{R}^4$ in modo che esista $T \in Hom(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^4)$ tale che

$$v_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \mapsto w_1 := \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \mapsto w_2 := \begin{pmatrix}0\\2\\5\\0\end{pmatrix},$$

$$v_3 := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \mapsto w_3 := \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \mapsto w_4 := \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix},$$

L'omomorfismo T è unico?
ii) Si determini la matrice di T rispetto alle basi canoniche dei due spazi in questione.
iii) Dati i vettori $w_\lambda := (1, 0, 0, \lambda)^t$, si determini, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, $T^{-1}\{w_\lambda\}$.
iv) Si determinino tutti i complementi diretti di $Im\,T$ in $\mathbf{R}^4$.

E2. Nel piano euclideo reale $\mathbf{E}^2$, in cui sia fissato un riferimento cartesiano (e opportunamente ampliato proiettivamente)
i) determinare la parabola $\mathcal{P}$ tangente in $P : [1, 0, 0]$ alla retta $r' : y = 3x$, passante per $Q : [0, 3, -1]$, e con fuoco $F : [1, 3, -1]$.
ii) Determinare la direttrice e abbozzare il grafico di $\mathcal{P}$.
iii) Verificare che i punti P, $D : [0, 1, 3]$, $H : [1, -3, 1]$ costituiscono un triangolo autopolare per $\mathcal{P}$.

T1. Sia dato uno spazio vettoriale V finitamente generato su un campo K.
i) Enunciare e dimostrare il teorema dello scambio.
ii) Dare la definizione di base di uno spazio vettoriale, e dimostrare che tutte le basi hanno lo stesso numero di elementi.
iii) Enunciare il teorema del completamento della base .
iv) Enunciare e dimostrare il teorema di Grassmann.

T2. Sia dato un piano euclideo reale, ampliato proiettivamente e complessificato.
i) Che cosa sono le rette isotrope del piano? E i punti ciclici?
ii) Quali coniche sono caratterizzate dal passaggio per i punti ciclici?
iii) Definire fuochi e direttrici di una conica.
iv) Ricavare, dall'approccio proiettivo, la proprietà delle coniche di essere luogo dei punti tali che il rapporto delle distanze rispettive da un punto dato e una retta data è...
v) Dimostrare iv) per via elementare, partendo dalla costruzione di Dandelin (limitarsi al caso dell'ellisse).

Tempo a disposizione 2h.30m
Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

Geometria 19/9/2000

① Determinare $w_4 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

tale che esista $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

con

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto w_4 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

T, qualora esista, è unica?

Si determini $m_{fe}(T)$
basi canoniche

Si det una base di Ker T e Im T

Si det. una base un complementare diretto di Im T in $\mathbb{R}^4$; si det. tutti i compl. diretti

Dato $w_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ Det. $T^{-1}\{w_\lambda\}$ al variare di λ

Sol. v_1, v_2, v_3 formano una base

Si noti che

$$v_3 + v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2v_2$$

$$\Rightarrow \quad v_4 = 2v_2 - v_3$$

T esiste $\Leftrightarrow$ $w_4 = 2w_2 - w_3 =$

$$= 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $x = 0$, $y = 4$, $z = 9$, $t = 0$ — T è unica poiché v_1, v_2, v_3 formano una base.

Determiniamo $m_{fe}(T)$

Proc. con l'algoritmo di Gauss (potrei usare anche prec.)

osserviamo che

$v_1 \longmapsto w_1$
$v_2 \longmapsto w_2$
$v_3 \longmapsto w_3$

Si può rapp.

con

$$\begin{array}{c} e_1 \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{c} e_1 \\ e_3 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{c} e_1 \\ e_3 \\ e_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim$$

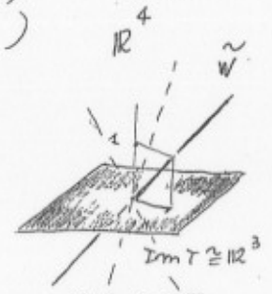
$$m_{fe}(T) \equiv A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si osservi che $\operatorname{Im} T = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{R}^3$

infatti $\rho(T)$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} T = \{\underline{0}\}$ (*) v. anche pag. 4

(nullità + rango) $\rho(A) = 3$)



Come compl. diretto si può prendere

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ arbitrari

in generale $\tilde{W} = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

— — —

$T^{-1}\{w_\lambda\} \neq \phi \iff \lambda = 0$

nel caso si risolve

$$A \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se $\lambda = 0$, da $\operatorname{Ker} T = \{\underline{0}\}$, si sa già che il sistema ha sol. unica.

Se si riconduce al sistema di Cramer

$$B \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che si può ris. con la f. di Cramer (**)

Si osservi che (*)

$\det B = -10 + 8 = -2$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

(verifica $5 - 4 = 1$
$2 \cdot 5 - 2 \cdot 5 = 0$
$-4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 0$ $\underline{\underline{\text{OK}}}$)

Dunque $T^{-1}\{w_\lambda\} = \begin{cases} \phi & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}$

(**) oppure direttamente per sost.

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ 2x - 2y = 0 \\ -4y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x - z = 1 \\ -4x + 5z = 0 \end{cases} \quad z = 1 + x$$

$5(1 + x) - 4x = 0 \Rightarrow x = 5$

$z = 4 \quad y = 5$

Geometria 19/9/2008

(2) Nel piano euclideo reale, app. ampliato a $\mathbb{P}^2$ si determini la parabola $\mathcal{P}$

passante per $P: [1, 0, 0]$, $Q: [0, 3; -1]$

e tangente in P a $r': y = 3x$

e avente il fuoco $F: [1, 3, -1]$

Sol. (I) $P = O$; le condizioni date implicano che $d: y = -\frac{1}{3}x$ è un diametro di $\mathcal{P}$.

Non solo, poiché $r' \perp d$, e r' è tangente a $\mathcal{P}$ in O, d è l'asse di $\mathcal{P}$!

L'eq. è della forma (*) (cf. forma canonica)

$$y - 3x = \lambda (3y + x)^2$$

$\Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & +\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ +\frac{3}{2} & \lambda & 3\lambda \\ -\frac{1}{2} & 3\lambda & 9\lambda \end{pmatrix}$$

$$a = -\frac{9}{4}\lambda - \frac{9}{4}\lambda - \frac{\lambda}{4} - \frac{81}{4}\lambda = -\frac{19-81}{4}\lambda = -\frac{100}{4}\lambda = -25\lambda$$

$$y = \lambda + 9\lambda = 10\lambda$$

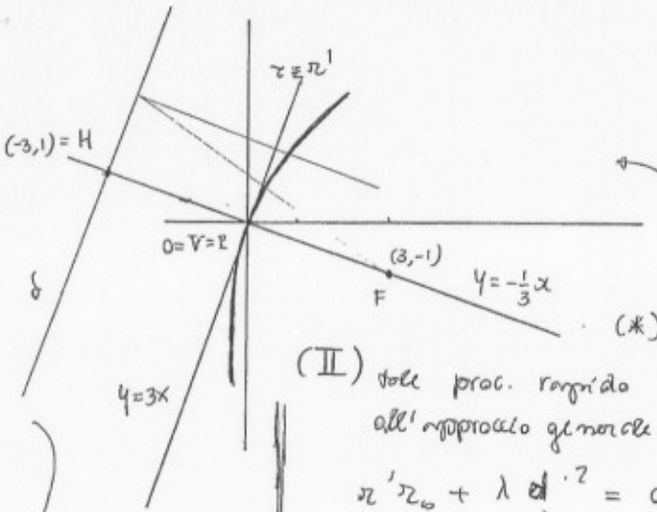
$$p^2 = -\frac{a}{y^3} = -\frac{-25\lambda}{10^3\lambda^3} = \frac{1}{40\lambda^2}$$

$$p^2 = \frac{1}{40\lambda^2}$$

ma $d(F, \underset{\substack{\| \\ O \text{ origine}}}{V}) = \frac{p}{2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$$p = 2\sqrt{10} = \frac{1}{2\sqrt{10}\,|\lambda|}$$

$$= |\lambda| = \frac{1}{40} \quad \ldots$$



Si sceglie $\lambda = -\frac{1}{40}$ per ragioni geometriche (**)

(*) ovviamente,

(II) dal proc. rapido è conforme all'approccio generale

$$r' r_0 + \lambda d^2 = 0$$

$$(3x_1 - x_2)x_0 + \lambda(3x_2 + x_1)^2 = 0$$

$$(3x - y) + \lambda(3y + x)^2 = 0$$

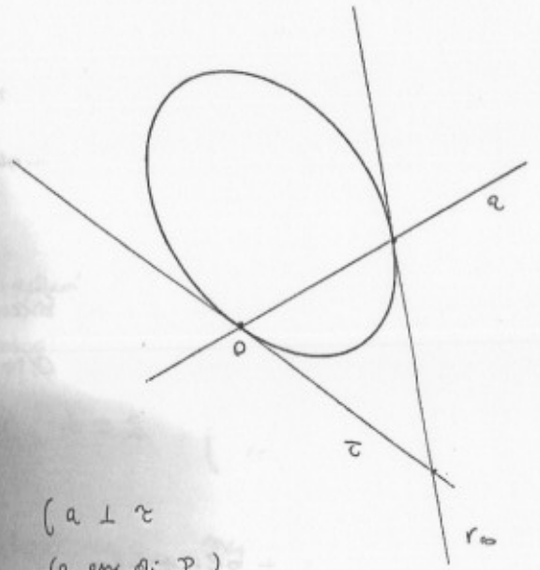
↑ eq. affine

è la stessa trovata prima. λ è determinato come prima. Vedi oltre pag 8

$\delta: (y-1) = 3(x+3)$

$y - 1 = 3x + 9$

$y = 3x + 10$



($a \perp \tau$
(a asse di P)

Poi si ricorre come prima al metodo degli invarianti

(**) basta osservare che $R \in P$ si trova nel semipiano $y - 3x < 0$

La verifica dell'ultimo punto si lascia:
è un fatto generale (D = polo improprio di $\tau = r'$ e di δ)
FDH è autopolare (cfr. facoltativo appello 5/9/2000)

III Il metodo più rapido per trovare P è però il seguente.

La direttrice δ si trova subito (passa per H, simmetrico di F rispetto a $V = R = O$ ed è $\parallel$ a ($e \perp r'$)

$$\delta: \quad y = 3x + 10 \qquad 3x - y + 10 = 0$$

☆ ma P è il luogo dei punti equidistanti da F e δ, sicché:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = \frac{(3x - y + 10)^2}{10} \Rightarrow$$

$$10(x^2 - 6x + \widehat{9} + y^2 + 2y + \widehat{1}) =$$

$$9x^2 + y^2 + 10^2 - 6xy + 60x - 20y$$

$$\Rightarrow \left[x^2 + 9y^2 + 6xy - 120x + 40y = 0\right] P$$

$$\left[(x+3y)^2 + 40(-3x+y) = 0\right]$$

$$(-40)[y - 3x] = (x+3y)^2$$

$$y - 3x = \left(-\frac{1}{40}\right)(x+3y)^2$$

ok

controllo con i primi 2 metodi