Università degli studi di Verona

Facoltà di Scienze MM.FF.NN

Corso di Analisi Matematica 2

ESERCIZI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

a cura di Roberto Pagliarini

Qui di seguito riporto alcuni esercizi sulle equazioni differenziali principalmente sulla risoluzione delle equazioni di secondo grado omogenee. Vi è anche un esercizio sulla trasformazione di un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine in un'equazione differenziale del secondo ordine, ed un esercizio sulla ricerca della soluzione generale di un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine

Esercizio1

Sia dato il seguente sistema di due equazioni di primo grado:

$$\begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = -2x + y \end{cases}$$

che può essere rappresentato in forma matriciale nella seguente maniera:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Abbiamo visto che risolvere un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine equivale a risolvere un'equazione del secondo ordine e viceversa.

Deriviamo ora la prima equazione del sistema ottenendo come risultato :

$$x'' = 4x' + y'$$

Nel risultato ottenuto andiamo ora a sostituire y', il cui valore è presente nella seconda equazione di primo grado del sistema di equazioni differenziali. Il risultato è il seguente:

$$x'' = 4x' - 2x + y$$

Andiamo ora a sostituire x', il cui valore è presente nella prima equazione di primo grado del sistema di equazioni differenziali ed otteniamo:

$$x'' = 4x' - 2x + (x' - 4x) = 5x' - 6x$$

e quindi:

$$x'' - 5x' + 6x = 0$$

Siamo dunque giunti al seguente risultato:

$$\begin{cases} x'' - 5x' + 6x \\ y = x' - 4x \end{cases}$$

La seconda equazione dell'ultimo sistema mi dice che y è completamente determinata non appena si conosca x.

<u>**Osservazione**</u>: se facciamo il polinomio caratteristico della matrice

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

otteniamo come risultato:

$$p(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \mathrm{I}\right) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

che presenta una chiara relazione con l'equazione

$$x'' - 5x' + 6x = 0$$

Esercizio 2

Cercare tutte le soluzioni dell'oscillatore armonico smorzato:

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

Cerchiamo soluzioni del tipo:

$$y(t) = e^{\lambda t} \qquad \lambda \in \Re \quad \text{oppure} \quad \lambda \in C$$

Determiniamo la derivata prima e seconda di $y(t)$:

$$y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$$
$$y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale i valori per $y(t), y'(t), y''(t)$ otteniamo la seguente equazione:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\lambda e^{\lambda t} + 2e^{\lambda t} = 0$$

la quale è verificata se e solo se:

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = 0$$

Sapendo che $e^{\lambda t}$ è sempre diverso da zero si dovrà avere che

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

Quindi il problema si riduce nella ricerca delle radici di un'equazione algebrica; si ricorda che le radici di un'equazione quadratica del tipo

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0\,,\; a \neq 0$$

sono date dalla formula

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Applicando questa formula otteniamo i valori per λ_1 e λ_2 che saranno rispettivamente

$$\lambda_1 = -1 + i \qquad\qquad \lambda_2 = -1 - i$$

Siamo quindi nel caso in cui $\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta \in C$ e dunque abbiamo due radici complesse coniugate:

$$y_1(t) = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{(-1+i)t}$$
$$y_2(t) = e^{(\alpha - i\beta)t} = e^{(-1-i)t}$$

Abbiamo due radici complesse coniugate che rappresentano due soluzioni linearmente indipendenti, ma noi le vorremmo reali visto che siamo partiti da coefficienti reali. Dato che per le formule di Eulero si ha:.

$$y_1(t) = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i * sen\beta t) = e^{-t}(\cos t + i * sent)$$
$$y_2(t) = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i * sen\beta t) = e^{-t}(\cos t - i * sent)$$

possiamo trovare due soluzioni reali e linearmente indipendenti usando le seguenti formule:

$$z_1(t) = \frac{y_1(t) - y_2(t)}{2} = e^{\alpha t}\cos\beta t$$

$$z_2(t) = -\frac{i}{2}(y_1(t) - y_2(t)) = e^{\alpha t} sen\beta t$$

Nell'esercizio in questione si avrà in particolare che due soluzioni reali linearmente indipendenti sono date da

$$z_1(t) = e^{-t}\cos t \quad , \quad z_2(t) = e^{-t}\,sent$$

e quindi possiamo determinare tutte le soluzioni perché queste sono date dalla combinazione lineare di queste due; allora la soluzione generale sarà data da:

$$y(t) = C_1 e^{-t}\cos t + C_2 e^{-t}\sin t \quad , \quad C_1, C_2 \in \Re$$

Esercizio 3

Cercare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale di secondo ordine

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Cerchiamo soluzioni del tipo:

$$y(t) = e^{\lambda t} \qquad \lambda \in \Re \quad \text{oppure} \quad \lambda \in C$$

Ragionando come nell'esercizio precedente ci siamo condotti a trovare le soluzioni dell'equazione

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

Sapendo che $e^{\lambda t}$ è sempre diverso da zero si dovrà avere che

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

Otteniamo che $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \in \Re$, e quindi siamo nel caso di due radici reali e coincidenti. Non ci resta che calcolare due soluzioni linearmente indipendenti. La prima è data da:

$$y_1(t) = e^{\lambda t} = e^{-t}$$

mentre la seconda la ottengo moltiplicando t ad $y_1(t)$, ossia:

$$y_2(t) = te^{\lambda t} = te^{-t}$$

La soluzione generale è:

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 te^{-t} \quad , \quad C_1, C_2 \in \Re$$

Esercizio 4

Cercare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale di secondo ordine

$$y'' + 9y = 0$$

Ragionando come nei casi precedenti sappiamo che dobbiamo risolvere

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

che ha come radici:

$$\lambda_1 = -3i\ , \quad \lambda_2 = 3i$$

Siamo nel caso di due radici complesse coniugate, ma nel caso in questione non vi è la parte reale, ossia $\alpha = 0$. Le due radici complesse coniugate e linearmente indipendenti sono:

$$z_1(t) = -\cos 3t$$

$$z_2(t) = sen 3t$$

La soluzione generale sarà data da:

$$y(t) = C_1 \cos 3t + C_2 sen 3t \ \ , \ \ C_1, C_2 \in \Re$$

Esercizio 5

Cercare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale di secondo ordine

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Il polinomio caratteristico associato all'equazione è:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

Si avrà

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2a}$$

da cui si ottiene

$$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = 2$$

Siamo nel caso di due radici reali e distinte; due soluzioni linearmente indipendenti sono date da:

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{3t}$$
$$y_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{2t}$$

e tutte le soluzioni sono date da combinazioni lineari di queste due; dunque la soluzione generale sarà:

$$y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t} \quad , \quad C_1, C_2 \in \Re$$

Esercizio 6

Cercare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale di secondo ordine

$$y'' + y' + 7y = 0$$

Operando come negli esercizi precedenti, abbiamo che il polinomio caratteristico associato all'equazione è

$$\lambda^2 + \lambda + 7 = 0$$

quindi si avrà

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-28}}{2a} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}i}{2}$$

per cui:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}i}{2}$$
$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}i}{2}$$

Siamo nel caso di due radici complesse coniugate, le quali sono:

Due soluzioni reali e linearmente indipendenti:

$$z_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{3\sqrt{3}}{2} t$$
$$z_2(t) = e^{-\frac{1}{2}t} sen \frac{3\sqrt{3}}{2} t$$

La soluzione generale sarà data da:

$$y(t)=C_1e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2}t+C_2e^{-\frac{1}{2}t}sen\frac{3\sqrt{3}}{2}t \quad , \quad C_1,C_2\in\Re$$

Esercizio 7

Trovare la soluzione generale del sistema

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

I passi da seguire saranno i seguenti:

1) ridursi ad un'equazione del secondo ordine;
2) risolvere l'equazione trovata al passo 1;
3) esibire la soluzione generale del sistema;

1) Trasformare il sistema lineare omogeneo in un'equazione del primo ordine: per vedere i passaggi vedi "Esercizio 1". Il risultato è:

$$\begin{cases} x''-5x'+6x=0 \\ y=x'-4x \end{cases}$$

2) Risolvere l'equazione differenziale di secondo ordine ottenuta al punto 1: questo è quanto è stato fatto nell'"Esercizio 5". Riassumiamo qui di seguito i risultati; due soluzioni linearmente indipendenti sono:

$$x_1(t)=e^{3t}$$
$$x_2(t)=e^{2t}$$

Sapendo che

$$y=x'-4x$$

allora avrò una soluzione $y_1(t)$ associata a $x_1(t)$ ed una soluzione $y_2(t)$ associata a $x_2(t)$, rispettivamente:

$$y_1(t)=x_1'(t)-4x_1(t)=3e^{3t}-4e^{3t}=-e^{3t}$$
$$y_2(t)=x_2'(t)-4x_2(t)=2e^{2t}-4e^{2t}=-2e^{2t}$$

Abbiamo quindi due coppie di soluzioni linearmente indipendenti, rispettivamente

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

3) Esibire la soluzione generale del sistema:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

$$= C_1 \begin{bmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t} \\ -C_1 e^{3t} - C_2 e^{2t} \end{bmatrix}$$