Algebra lineare con Elementi di Geometria (Prof. M. Spera)

modulo avanzato

Prova Scritta del 21/12/2009

(1) Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, si determini la matrice dell'affinità T tale che:

$A:(0,0) \xmapsto{T} A'(0,-1)$; $B:(1,1) \xmapsto{T} B'(1,-2)$, $C:(0,1) \xmapsto{T} C':(1,-1)$

Di che tipo di trasformazione si tratta?

Si determinino, in seguito, le coordinate baricentriche di $P:(1,0)$ rispetto ad A, B, C, nonché quelle di P' (trasformato di P) rispetto ad A', B', C'.

(2) Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, e ampliato proiettivamente, si determini la conica $\mathcal{C}$ tale che $a: x+2y=0$ sia un asintoto, che risulti tangente a $r: x+y-2=0$ in $P:(1,1)$ e passi per $Q:(-1,-1)$.

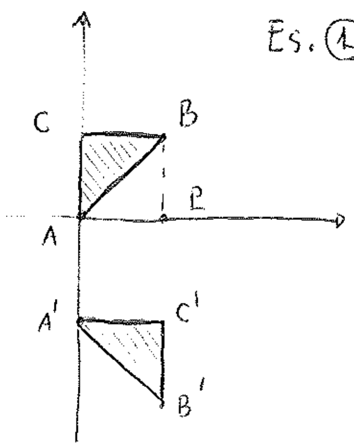
Se ne determini il tipo affine e metrico, e se ne abbozzi il grafico.

(3) Nello spazio euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, si determini, qualora esista, il piano π' del fascio di asse $r: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ parallelo a $\pi: x+y-1=0$

Considerata la retta $s: \begin{cases} x+y-1=0 \\ y+z=0 \end{cases}$, si verifichi che r e s sono sghembe, e se ne determini la distanza e la perpendicolare comune

Tempo a disposizione 1h 45m. Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Es. (1)



Prof. M. Spera

Algebra lineare - 21/12/09

(1) Dire se la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile. In ogni caso determinare gli autospazi relativi agli autovalori.

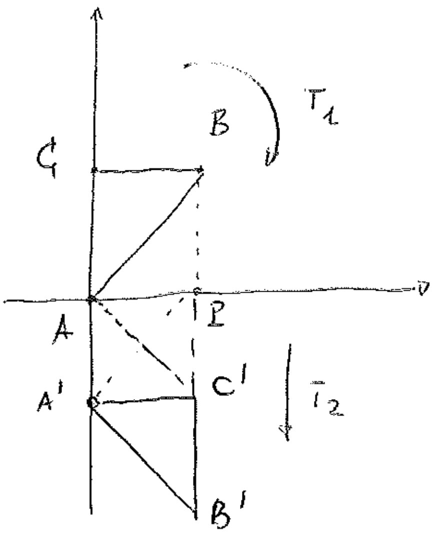
(2) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, $\ker A_\lambda$ e $\operatorname{Im} T_\lambda$, dove

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tempo a disposizione. 45 m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

(1)



$$T$$

$$A: (0,0) \longmapsto A': (0,-1)$$

$$B: (1,1) \longmapsto B': (1,-2)$$

$$C: (0,1) \longmapsto C': (1,-1)$$

1° modo

T è ottenuta concatenando una rotazione di $-\frac{\pi}{2}$ attorno ad A, T_1 con una traslazione T_2, $\underline{b} = (0,-1)$

si tratta di un movimento rigido

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\frac{\pi}{2}) & -\sin(-\frac{\pi}{2}) \\ 0 & \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos(-\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_2 \cdot T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

controllo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} A' & B' & C' \end{matrix} \end{array} \quad \checkmark$$

2° modo (Standard) $\quad T: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = 0 \qquad b_2 = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ -1 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ +1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} + a_{12} = +1$$
$$-1 + a_{21} + a_{22} = -2$$

$$a_{11} + a_{12} = +1$$
$$a_{21} + a_{22} = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ -1 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 0$$

$$a_{21} = -1$$

$$a_{12} = 1$$

$$-1 + a_{22} = -1 \quad \Rightarrow \quad a_{22} = 0$$

$$T: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \checkmark$$

<u>coordinate</u> <u>baricentriche</u> di P rispetto ad A, B, C

per via geometrica $\quad \underset{A}{u} = \dfrac{+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}, \quad \underset{B}{v} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \quad \underset{C}{w} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$

area $ABC = \frac{1}{2}$

$$u = +1, \quad v = 1, \quad w = -1$$

$$P = -A + B - C$$

analiticamente

$$A(ABC) = \frac{1}{2}$$

$$u = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} & & \end{vmatrix} = 1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1-1 = +1$$

$$v = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$w = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad \checkmark$$

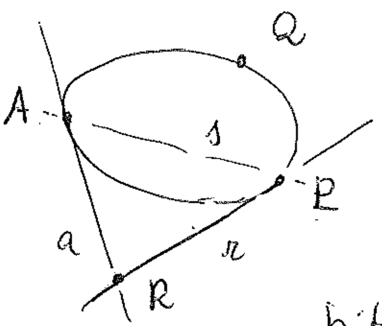
coordinate baricentriche di P' rispetto ad A', B', C' :

le stesse $\qquad P' = +A' + B' - C'$

② Conica $\mathcal{C}$ tale che $a: x+2y=0$ sia un asintoto, che risulti tangente a $r: (x-1)+(y-1)=0$ in $P: (1,1)$ e passi per $Q: (-1,-1)$

(coordinate omogenee)

Sia $A = [0, 2, -1]$ la direzione di a.



$a: \quad y = -\frac{x}{2}$

dir: $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

La conica appartiene al fascio di coniche bitangenti

$$\boxed{ar + \lambda s^2 = 0}$$

la retta s ha equazione:

$$\begin{array}{r} \\ A \to \\ P \to \end{array} \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$x_0 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{2+1=3} - x_1 \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{0+1=1} + x_2 \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{0-2=-2} = 0$$

$$3x_0 - x_1 - 2x_2 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_0 = 0 \qquad \boxed{s: x + 2y - 3 = 0}$$

$$(x+2y)(x+y-2) + \lambda(x+2y-3)^2 = 0$$

Passaggio per $Q: (-1,-1)$ $\quad \underbrace{(-1-2)}_{-3}\underbrace{(-2-2)}_{-4} + \lambda\underbrace{(-1-2-3)^2}_{36} = 0$

$12 + \lambda \cdot 36 = 0 \qquad \lambda = -\frac{12}{36} = -\frac{1}{3}$

$$\mathscr{C}: \quad (x+2y)(x+y-2) - \frac{1}{3}(x+2y-3)^2 = 0$$

$$3(x+2y)(x+y-2) - (x+2y-3)^2 = 0$$

$$3\left(x^2 + \overbrace{2xy + xy}^{3xy} + 2y^2 - 2x - 4y\right)$$

$$-\left(x^2 + 4y^2 + 9 + 4xy - 6x - 12y\right) = 0$$

$$3x^2 + 9xy + 6y^2 - \cancel{6x} - \cancel{12y}$$

$$-x^2 - 4y^2 - 9 - 4xy + \cancel{6x} + \cancel{12y} = 0$$

$$\mathscr{C}: \boxed{2x^2 + 2y^2 + 5xy - 9 = 0}$$

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -18 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{A} = -18 \cdot \mathfrak{A}_{00} = -18 \cdot (-9) = 18 \cdot 9 = 3^4 \cdot 2$$

$$\mathfrak{A}_{00} = -9 = -3^2$$ (iperbole, come è giusto che sia)

asintoti: $2l^2 + 5lm + 2m^2 = 0 \qquad 2 + 5m + 2m^2 = 0$

$$m = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4} \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ -2 \end{cases}$$

Il centro è in $O:(0,0)$ (chiaro...)

asintoti: a_1: $x+2y=0$ $\quad y=-\frac{x}{2}$ (già dato) ✓

a_2: $y-2x=0$ $\quad y=-2x$

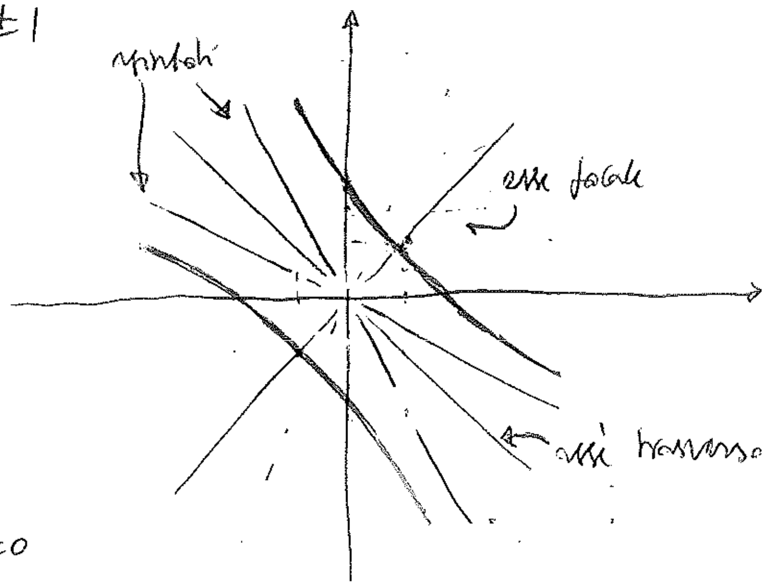
assi (in tre modi...) vediamoli come diametri coniugati ortogonali

$$(-m \quad 1)\begin{pmatrix}4 & 5\\ 5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}=0$$

$$(-m \quad 1)\begin{pmatrix}4+5m\\ 5+4m\end{pmatrix}=0 \qquad -m(4+5m)+5+4m=0$$

$$-4m-5m^2+5+4m=0 \qquad m^2-1=0$$

$\boxed{\text{assi: } y=\pm x}$ $\quad m=\pm 1$



a vale $\sqrt{2}$ (chiaro

l. semiasse (focale)

intersechiamo con l'asse y, per abbozzare il grafico

$\{x=0\}\cap\gamma$ dà $2y^2-9=0$

$$y=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2} \qquad 3\cdot 0{,}7\simeq 2{,}1$$

con l'asse x: $\quad x=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Calcoliamo le lunghezze dei semiassi a, b col metodo degli invarianti ortogonali

$$t^2 + \frac{\mathcal{A}_{00}\, \gamma}{\mathcal{A}}\, t + \frac{\mathcal{A}_{00}^{\,3}}{\mathcal{A}^2} = 0$$

$\mathcal{A} = 2 \cdot 3^4$

$\mathcal{A}_{00} = -3^2$

$\gamma = 8 = 2^3$

$$t^2 + \frac{-3^2 \cdot 2^3}{2 \cdot 3^4}\, t + \frac{-3^6}{4 \cdot 3^8} = 0$$

$$t^2 - \frac{4}{9}\, t - \frac{1}{36} = 0$$

$$36\, t^2 - 16\, t - 1 = 0$$

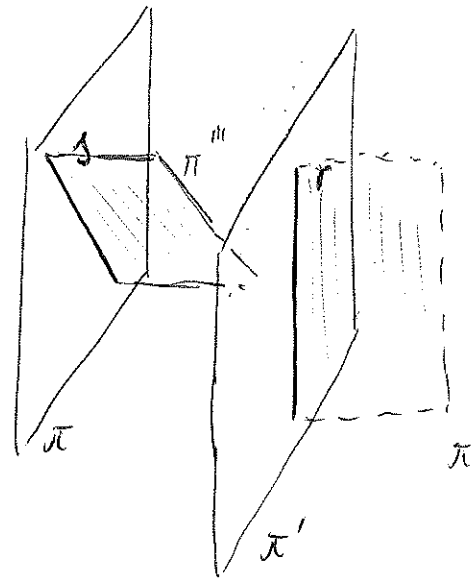
$$t = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{36} = \frac{8 \pm 10}{36} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{18} \end{cases}$$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{\alpha}$ $\qquad \alpha = a^2 = 2 \qquad a = \sqrt{2}$ $\qquad$ V

$-\frac{1}{18} = -\frac{1}{\beta}$ $\qquad \beta = b^2 = 18 \qquad b = \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 9} = 3\sqrt{2}$

(3) $\quad r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \pi: \ x + y - 1 = 0$

$$s: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} y = 1 - x \\ z = -y = -1 + x \end{array}$$



r è $\parallel \pi$ $\qquad r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

π', piano per $r \parallel \pi$ esiste

Si ha, necessariamente

$\pi': \ x + y = 0$

$$s: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + t \end{cases} \qquad \text{dir}: \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

|| r ed s hanno direzioni distinte e giacciono in piani paralleli (distinti) $\Rightarrow$ sono sghembe.

La perp. comune si può ottenere in vari modi, ad esempio così: Sia π'': piano del fascio di asse r $\perp \pi'$

esso è $\pi'': x - y = 0$

Sia π''' piano del fascio di asse s, $\perp \pi$ $\qquad \pi''': x - y - 2z - 1 = 0$

$$\lambda(x + y - 1) + \mu(y + z) = 0$$

$$\lambda x + (\lambda + \mu) y + \mu z - \lambda = 0$$

deve essere

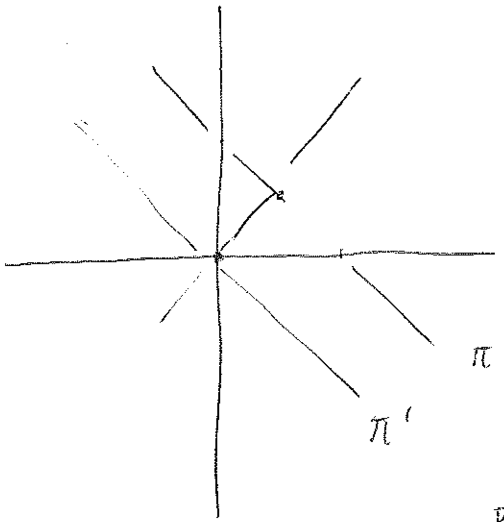
$$\lambda \cdot 1 + (\lambda + \mu) \cdot 1 + \mu \cdot 0 = 0$$

$$2\lambda + \mu = 0 \quad \text{se } \lambda = 1, \text{ è } \mu = -2 \quad \Rightarrow$$

perpendicolare comune:

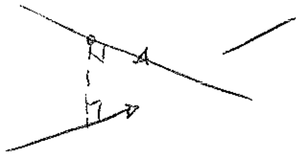
$$\tilde{r} := \pi'' \cap \pi''' = \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

ossia $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2z + 1 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x - y = 0 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$



$$\tilde{r} := \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

ulteriore controllo: $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ P_t $\quad s: \begin{cases} x = u \\ y = 1 - u \\ z = -1 + u \end{cases}$ Q_u



$$\overrightarrow{P_t Q_u} = (u,\ 1-u,\ -1+u-t)$$

$$\overrightarrow{P_t Q_u} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad -1 + u - t = 0 \qquad u - t = 1$$

$$\perp \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u - (1-u) + (-1+u-t) = 0$$

$$2u - 1 - 1 + u - t = 0$$

$$3u - t = 2$$

$$\begin{cases} u - t = 1 \\ 3u - t = 2 \end{cases} \qquad 2u = 1 \quad u = \frac{1}{2}$$

$$t = u - 1 = -\frac{1}{2}$$

$u = \frac{1}{2} \qquad t = -\frac{1}{2}$

retta : $\quad \tilde{r} : \underline{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\tilde{r} : \underline{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

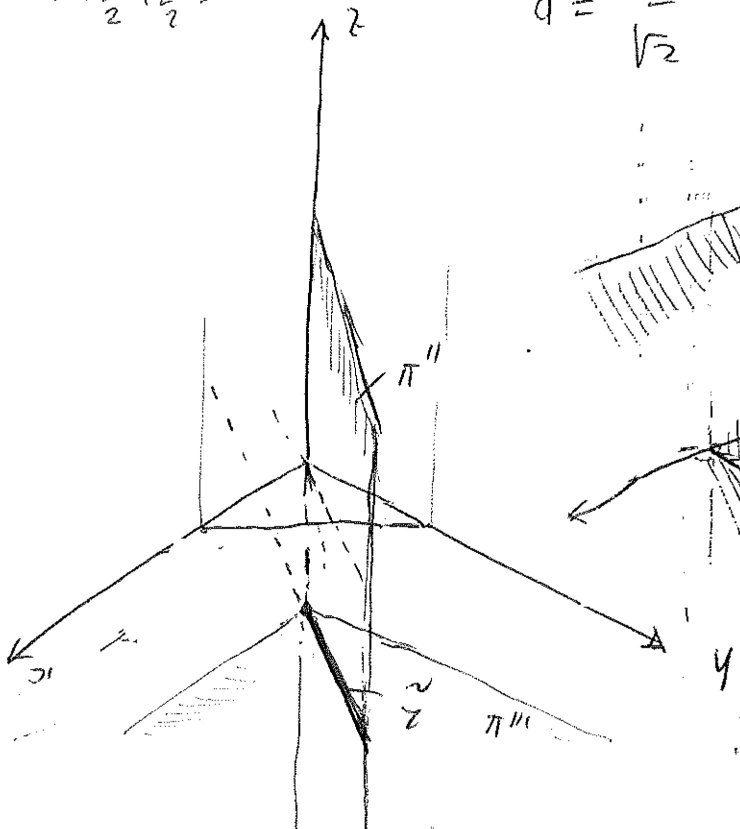
$$\begin{cases} x = \xi \\ y = \xi \\ z \; -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \checkmark$$

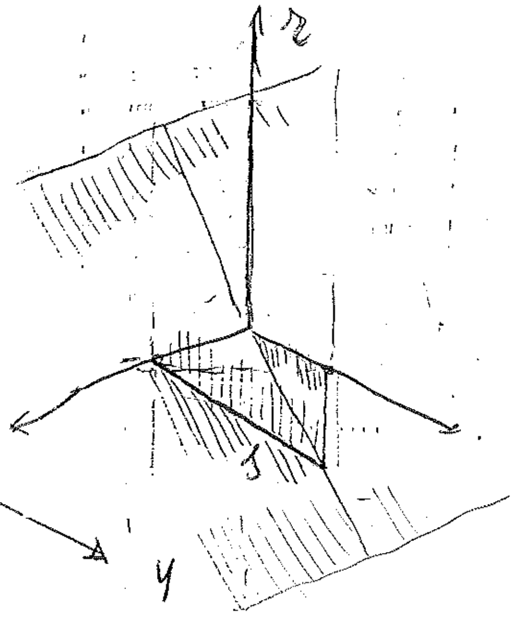
distanza $= d(\pi, \pi') = \frac{\sqrt{2}}{2}$

controllo:

$$d\left(P_{-\frac{1}{2}}, Q_{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \qquad d = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \checkmark$





(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ [è un blocco di Jordan]

$P_c^A(\lambda) = (1-\lambda)^3 \qquad m_a(1) = 3 \; ; m_g(1) = 2$

infatti

$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 1

$V_1^A = \langle e_1, e_3 \rangle$ (immediato)

(2) $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det A_\lambda = \lambda = 0 \iff \lambda = 0$

$\operatorname{Ker} A_\lambda = \begin{cases} \{0\} & \lambda \neq 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle & \lambda = 0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= x \\ y &= -x \\ z &= 0 \end{aligned}$

$\operatorname{Ker} A_0 : \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\operatorname{Im} T_\lambda = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \lambda \neq 0 \\ \left\langle \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\rangle & \lambda = 0 \end{cases}$

$y = 0$