ESERCIZI di ALGEBRA LINEARE

Esercizio 1
Sia $f : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ definita da

$$f\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Verificare che f è una applicazione lineare, trovare $N(f)$ e $Im(f)$. Trovare la matrice A associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ sul dominio e codominio, dove

$$\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$$

Esercizio 2
Sia $P_4(\mathbb{R})$ l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamento minore di 4, e sia $f : P_4(\mathbb{R}) \to P_4(\mathbb{R})$ definita da $f(p) = xp'$, dove p' è la derivata del polinomio p. Dimostrare che f è una applicazione lineare, e trovare la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ sul dominio e alla base $\mathcal{C} = \{2, x-1, x^2+1, x^3\}$ sul codominio.

Esercizio 3
Si consideri la seguente applicazione lineare: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ y+2z \\ -z \end{pmatrix}$$

Determinare la matrice A_1 associata a f rispetto alla base canonica su dominio e codominio.

Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, dove $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, è una base di $\mathbb{C}^3$.

Determinare la matrice A_2 associata a f rispetto alla base canonica su dominio e alla base $\mathcal{B}$ sul codominio.
Determinare la matrice A_3 associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ su dominio e alla base canonica sul codominio.

Esercizio 4
Siano V e W due spazi vettoriali su $\mathbb{C}$ di dimensione 2 e 3, rispettivamente, e siano $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ una base di V e $\mathcal{D} = \{w_1, w_2, w_3\}$ una base di W. Sia $f : V \to W$ l'applicazione lineare tale che $f(v_1) = w_1 - 2w_2 + u_3$, $f(v_2) = w_3 - 2w_1$.Determinare la matrice associata a f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$. Determinare le componenti rispetto a $\mathcal{C}$ del vettore $f(v)$, dove $v = \frac{-1}{2}v_1 + v_2$.