Geometria — Prova scritta del 19/9/2007

(Prof. M. Spera)

Svolgere l'esercizio ① o l'es. ② e altri due esercizi a scelta. Tempo a disposizione: 2h. Le risposte vanno adeguatamente giustificate

① Sia data la porzione di elicoide $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = v \end{cases}$ $u>0$, $v \in (0, 2\pi)$

su di esso si consideri l'elica cilindrica $\mathcal{H}$: $\begin{cases} x = \cos v \\ y = \sin v \\ z = v \end{cases}$

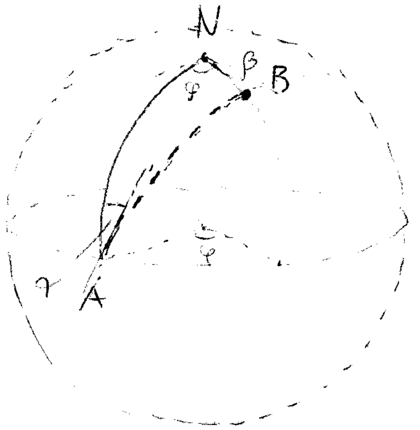
Dopo averla parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, se ne calcoli la curvatura, la torsione e la curvatura geodetica e normale. Osservato che i regoli dell'elicoide hanno curvatura normale nulla (perché?) e sono ortogonali ad $\mathcal{H}$, concludere che $H|_{\mathcal{H}} = 0$.

② Dato l'elicoide dell'es. 1, se ne calcolino la prima e seconda forma fondamentale, nonché H e K, dimostrando che le linee coordinate sono asintotiche. Si verifichi la relazione $K|_{\mathcal{H}} = -\tau^2|_{\mathcal{H}}$ [caso particolare del teorema di Beltrami - Enneper].
Si calcoli $\frac{\nabla}{ds}\underline{r}'$, ove $\underline{r}'$ è il versore tangente di $\mathcal{H}$ (s = lunghezza d'arco).

③ Dimostrare che una superficie Riemanniana (astratta) chiusa (i.e. compatta e senza bordo) diffeomorfa ad un toro non può ammettere una metrica con curvatura sempre positiva o negativa

④ ⟶

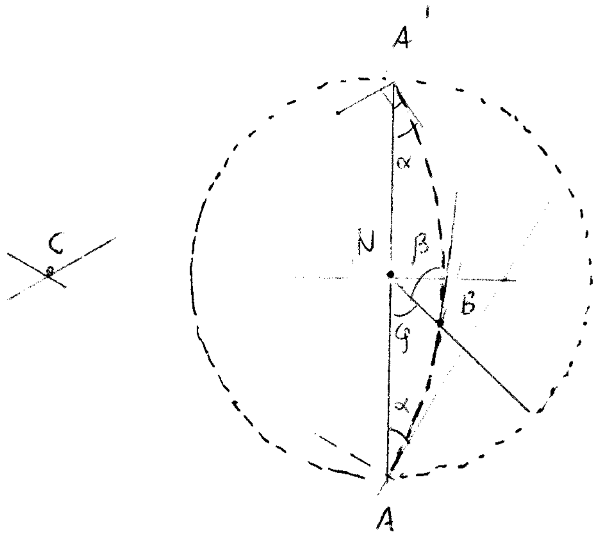
AB arco di cerchio massimo



1. Specificare la costruzione della proiezione di AB data qui sotto.

proiezione stereografica (dal polo sud)

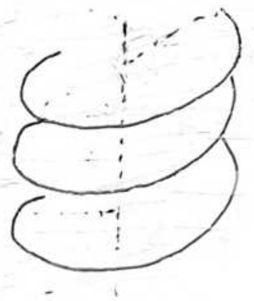
2. Quale relazione intercorre tra α e β?



① e ②

elicoide $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u \sin v \\ z = v \end{cases}$ $\quad u > 0$, $\quad v \in (0, 2\pi)$

$\underline{r} = \underline{r}(u,v)$



elica γ : $\begin{cases} x = \cos v \\ y = \sin v \\ z = v \end{cases}$ $\qquad \cdot = \dfrac{d}{dv}$

lunghezza d'arco: $\|\dot{\underline{r}}\|\, dv = \sqrt{2}\, dv = ds$

$\underline{r} : (\cos v, \sin v, v)$

$\dot{\underline{r}} : (-\sin v, \cos v, 1)$

poniamo

$$s = \sqrt{2}\, v$$

$$' = \frac{d}{ds}$$

$$\underline{r} = \left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\underline{r}' = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\underline{r}'' = \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\underline{r}''' = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

curvatura $\kappa = \|\underline{r}''\| = \dfrac{1}{2}$

$s/\sqrt{2}$

torsione $\tau = -\dfrac{\det(\underline{r}', \underline{r}'', \underline{r}''')}{\kappa^2} = (-4) \cdot \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2}\cos & -\frac{1}{2}\sin & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos & 0 \end{vmatrix} =$

(Laplace)

$$(-4)\cdot \frac{1}{\underbrace{2\cdot 2}_{4}\,\underbrace{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}_{2}} \begin{vmatrix} -\cos & -\sin \\ \sin & -\cos \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} k &= \frac{1}{2} \\ \tau &= -\frac{1}{2} \end{aligned}}$$

curvatura geodetica dell'elica

$$k_g = \underset{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{2}}}{k} \langle \underline{N}, \underline{b} \rangle$$

$$\frac{s}{\sqrt{2}}$$

calcoliamo $\underline{b} = \underbrace{\underline{r}'}_{\underline{t}} \times \underbrace{2\underline{r}''}_{\underline{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\sin\cdot & \cos\cdot & 1 \\ -\cos\cdot & -\sin\cdot & 0 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\underline{i}\left(+\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - \underline{j}\left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \underline{k} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin\frac{s}{\sqrt{2}} , -\cos\frac{s}{\sqrt{2}} , 1 \right)$$

$\underline{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$

calcoliamo $\underline{N} = \dfrac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{\|\cdot\|}$

$\underline{r}_u = (\cos v, \sin v, 0)$

$\underline{r}_v = (-u\sin v, u\cos v, 1)$

poniamo $u \equiv 1$

$$\underline{N}\Big|_{\mathcal{H}} = \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{\| \quad \|}\Big|_{\mathcal{H}} = \frac{\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -\sin v & \cos v & 1 \end{vmatrix}}{\| \quad \|} = \frac{1}{\underbrace{\|\cdot\|}_{=\sqrt{2}}} (\sin v, -\cos v, 1)$$

$\Rightarrow$ posto $v = \frac{s}{\sqrt{2}}$, si ha $\underline{N} = \underline{b}$

$\Rightarrow \quad k_g = k = \frac{1}{2} \quad (\neq 0)$ [$\mathcal{X}$ non è pertanto una geodetica]

$\Rightarrow \quad k_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{X}$ linea asintotica

ora, i regoli $\quad \underline{r} = \underline{r}(u, v_0) =$

$$(u \cos v_0 , u \sin v_0 , v_0)$$

sono pure linee asintotiche $\quad (k_n = 0)$

e sono ortogonali ad $\mathcal{X}_u$ (u fisso)

$\Rightarrow$ le due asintotiche sono ortogonali $\Rightarrow$ l'indicatrice di Dupin è costituita da due iperboli equilatere $\Rightarrow$ l'elicoide è una sup. minima.

Si osservi pure che, in virtù del teorema di Beltrami - Enneper, $K = -\tau^2$ (su una linea asintotica con curv $\neq 0$) $\Rightarrow$

$$K\Big|_{\mathcal{X}} = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$$

controlliamolo col calcolo seguente:

Calcoliamo $K = \dfrac{e g - f}{EG - F^2}$

dispense

☆ tale calcolo è già stato svolto nel cap. XII !

si ha $K = - \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ $\left(\Rightarrow K = -\dfrac{1}{4} \right)$ per $x \equiv 1$

nel corso di questo si trova $e = g = 0$

$\Rightarrow$ le linee coordinate sono asintotiche e ortogonali ($F=$

($\Rightarrow H = 0$) ; di nuovo, l'elicoide è una sup. minima.

Riguardo a $\dfrac{\nabla}{ds} \underline{r}'$, è subito, da $\underline{b} = \underline{N}$,

$\dfrac{\nabla \underline{r}'}{ds} = \underline{P} \cdot \underline{r}'' = \underline{r}''$ (ovviamente, $\mathcal{X}$ non è una geodetica, come s'era già visto)

Proiezione su $T_p \Sigma$ in un pto $p \in \mathcal{X}$.

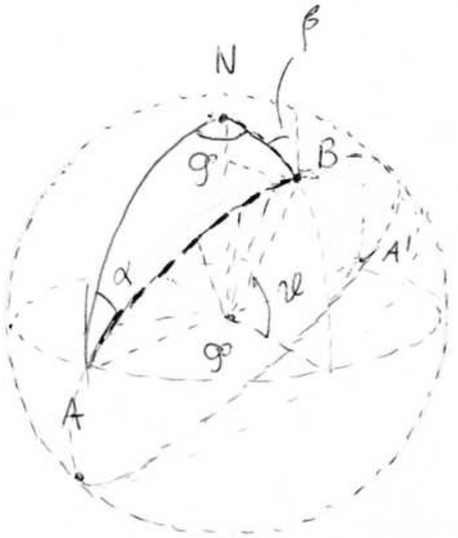
③ Per una superficie chiusa ($\equiv$ compatta e senza bordo) diffeomorfa ad un toro, e dotata di metrica g di curvatura K, si ha

(Gauss-Bonnet) $$\int_\Sigma K \, d\sigma = 2 - 2 \cdot \underset{\substack{\| \\ g \text{ (genere)}}}{1} = 0$$

Se $K \gtrless 0$ su Σ, si avrebbe, rispettivamente

$$0 \lessgtr \int_\Sigma K \, d\sigma = 0 \quad , \text{ assurdo.}$$

④

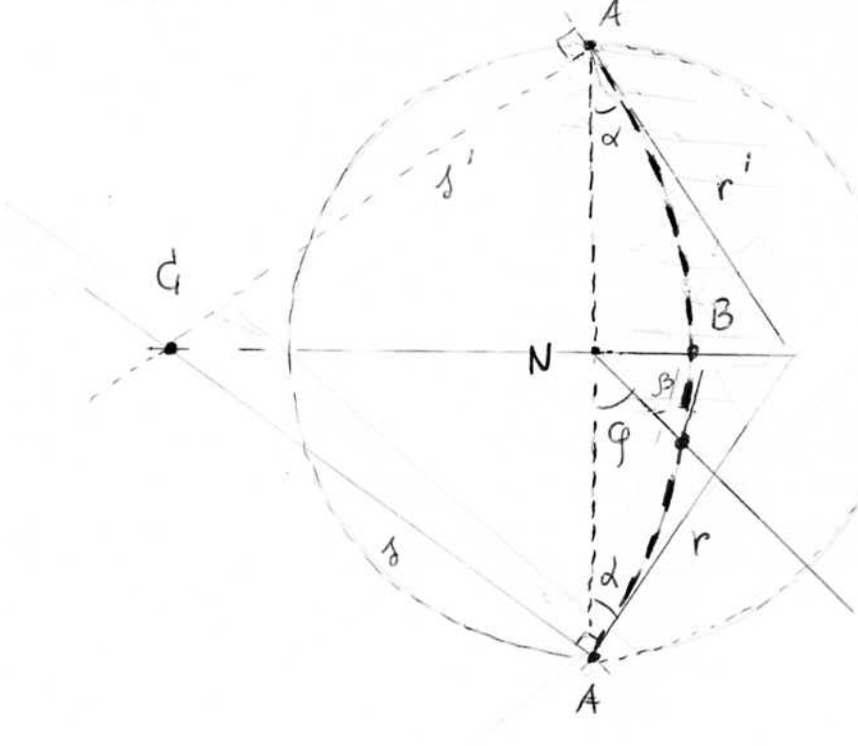


$R = 1$

La proiezione stereografica manda cerchi in cerchi e conserva gli angoli

$\widehat{AB}$ è un arco di cerchio massimo

tracciata r (e la simmetrica r') e le ⊥ s, s' in A, A'



queste si incontrano in C, che è necessariamente il centro del cerchio A'BA, proiezione del cerchio massimo dato;

si osservi che

$$\boxed{\sin\beta \cdot \underbrace{\cos\vartheta}_{\text{raggio del parallelo per B}} = \sin\alpha}$$

(Clairaut)