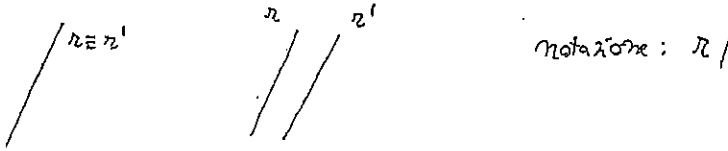
ELEMENTI DI GEOMETRIA — Lezione II

Prof. M. Spera a.a. 2007-08

◇ Richiami: il parallelismo nel piano e nello spazio

• piano Due rette r e r' si dicono parallele se coincidono o non hanno punti in comune



notazione: $r \parallel r'$

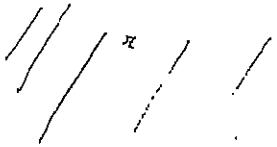
Il parallelismo è una relazione di equivalenza: ovvero

i) riflessiva ($r \parallel r$)

ii) simmetrica ($r \parallel r' \Rightarrow r' \parallel r$)

iii) transitiva ($r \parallel r'$, $r' \parallel r'' \Rightarrow r \parallel r''$)

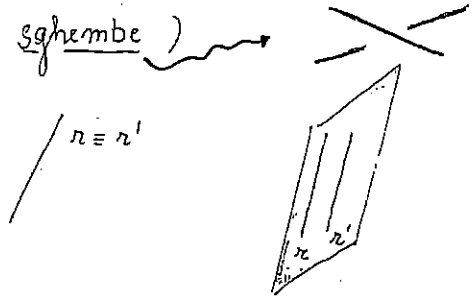
Data r, la sua classe di parallelismo (ovvero l'insieme di tutte le rette parallele ad r) è detta direzione di r



• Spazio

◇ Due rette r e r' si dicono parallele se sono
- complanari e coincidono o
- non hanno punti in comune

⚠ Due rette possono non avere punti in comune senza essere parallele (si dicono in tal caso sghembe)

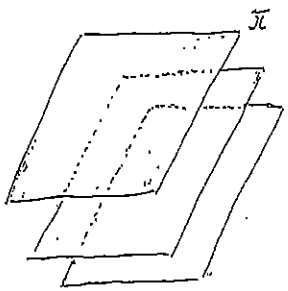


Di nuovo, il parallelismo definisce una relazione di equivalenza (la dimostrazione della transitività non è del tutto banale e la direzione di una retta è la sua classe di parallelismo.

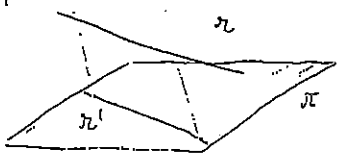
◇ Due piani π e π' si dicono paralleli se o coincidono o non hanno punti in comune

[Se hanno un punto in comune e non coincidono, hanno esattamente una retta in comune lo vedremo nella nostra ricostruzione. Sarà conseguenza del teorema di Grassmann]

Nello spazio, una classe di parallelismo di piani è detta giacitura: consta di un piano e di tutti i piani ad esso paralleli



Una retta è parallela ad un piano se è parallela ad una retta di tale piano.



Si dice anche: la sua direzione è contenuta nella giacitura del piano.

Ciò in vista degli sviluppi successivi, in cui direzioni e giaciture (useremo in generale solo il secondo termine) saranno interpretabili come spazi vettoriali, e la relazione di parallelismo sarà formulata in termini di sottospazi.

Lo spazio vettoriale geometrico

Una discussione esaustiva di tale argomento richiederebbe a rigore una fondazione autonoma della geometria euclidea. Di fatto, la nostra trattazione assiomatica successiva ci permetterà di recuperarla. Si vedano comunque i richiami delle pagine precedenti.

L'approccio presente è tuttavia importante per fornire un contenuto intuitivo a ciò che segue, che andrebbe altrimenti perduto, a detrimento di un'autentica comprensione.

◇ ◇ ◇

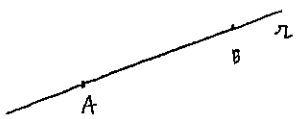
Poniamoci nello "spazio euclideo".

Un segmento orientato è, per noi, una coppia ordinata di punti. Notazione

AB

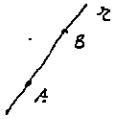
primo estremo (origine) — secondo estremo

Ciò è sufficiente; in generale si considerano, sulla retta r determinata da A e B (se distinti), tutti i punti che seguono A e precedono B



direzione di AB : quella di r

verso : A precede B



Se $B = A$ sia la direzione che il verso sono indeterminati

Rappresentazione grafica

Fissata un'unità di misura, ha senso parlare di lunghezza di AB, denotata con $|AB|$ (è un numero reale non negativo).

Se $A = B$ è $|AA| = 0$.

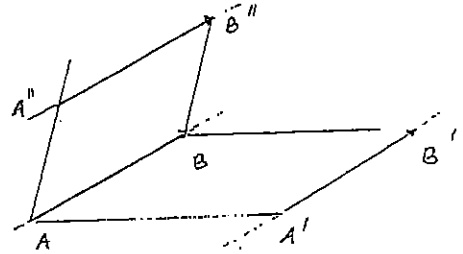
☆ Def. Due segmenti orientati AB e $A'B'$ si dicono equipollenti se hanno la stessa lunghezza, direzione e verso.

Si scrive $AB \sim A'B'$

$\sim$ è, nell'insieme di tutti i segmenti orientati, una relazione di equivalenza, ovvero $\sim$ è

- riflessiva $(AB \sim AB)$
- simmetrica $(AB \sim A'B' \Rightarrow A'B' \sim AB)$
- transitiva $(AB \sim A'B';\ A'B' \sim A''B'' \Rightarrow AB \sim A''B'')$

Un segmento orientato AB determina pertanto la classe di equivalenza consistente di tutti i segmenti orientati ad esso equipollenti. Tale classe è detta vettore (notazione: $\overrightarrow{AB}$) (o anche vettore geometrico, o vettore libero)



☆ L'insieme di tali classi è detto spazio vettoriale geometrico notazione: $\mathbb{S}$

(Per il momento è solo un insieme)

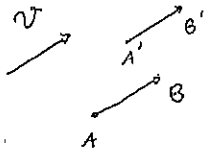
Se $\mathcal{S} = \{\text{segmenti orientati}\}$

$\sim$: equipollenza

È $\mathbb{S} = \mathcal{S}/\sim$ insieme quoziente (rispetto a $\sim$).

Dato $\underline{v} \in \mathbb{S}$ (vettore geometrico)

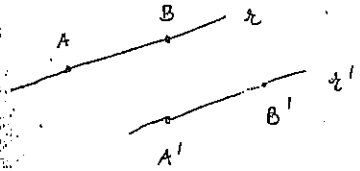
ha senso parlare di lunghezza, direzione e verso di $\underline{v}$ come lunghezza, direzione e verso di un suo qualsiasi rappresentante AB



La classe di AA (A qualsiasi) è il cosiddetto vettore nullo $\underline{0}$ (che pertanto ha direzione e verso indeterminati, e lunghezza nulla)

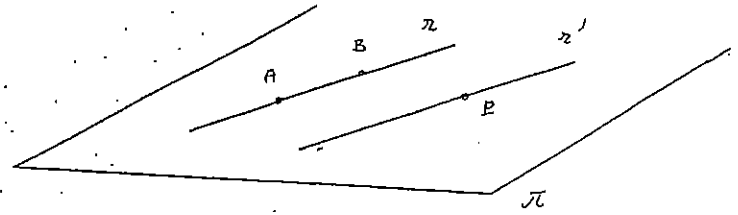
Notiamo che dal V° postulato di Euclide si ricava che (*) (vedi pagina successiva)

"dato AB, $A \neq B$ e $A' \notin r$, retta individuata da AB, $\exists!\ B'$ tale che $A'B' \sim AB$



Un vettore applicato in A è una coppia $(A, \underline{v})$ $(\underline{v} \in \mathbb{S})$, ovvero, è di fatto l'unico segmento orientato AB tale che $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$, ovvero l'unico

Inciso: nota (*), pagina precedente



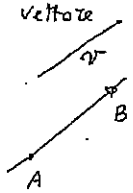
L'esistenza e l'unicità della parallela r' per P ($\notin r$) ad r nello spazio può ottenersi così:

dati A, B distinti su r, A, B, P risultano non allineati, e dunque determinano uno e un sol piano (è un postulato euclideo spaziale) π. In tale piano si applica il V° postulato, ottenendo r'.

rappresentante di $\underline{v}$ avente A come primo estremo.

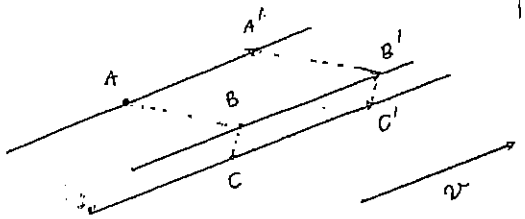
Si scrive anche " $\underset{\text{punto}}{B} = \underset{\text{punto}}{A} + \underset{\text{vettore}}{\underline{v}}$ "

o anche " $B - A = \underline{v}$ "

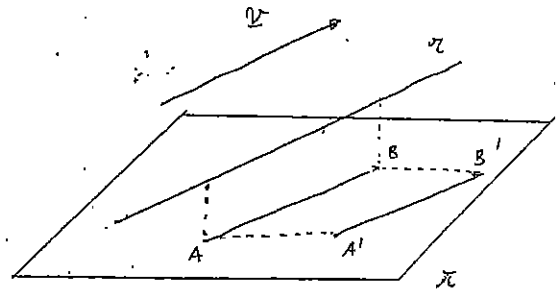


un vettore induce perciò una <u>traslazione</u> nello spazio euclideo

| nota zione "affine" |



- Due vettori si dicono <u>paralleli</u> se hanno la stessa direzione ($\underline{0}$ è parallelo ad ogni vettore).
- Due vettori paralleli si dicono <u>opposti</u> se hanno uguale lunghezza e versi opposti (l'opposto di $\underline{v}$ è denotato con $-\underline{v}$)
- un vettore è <u>parallelo</u> ad un piano se la sua direzione è contenuta nella <u>giacitura</u> del piano



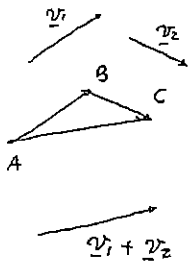
Strutturiamo ora l'insieme $\mathcal{S}$

- definiamo la <u>somma</u> di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$

i) Scegliamo A

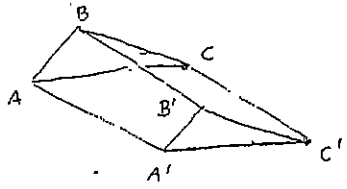
ii) determiniamo B e C tali che $\overrightarrow{AB} = \underline{v}_1$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}_2$

iii) definiamo $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 := \overrightarrow{AC}$,



<u>classe di equipollenza</u> di AC

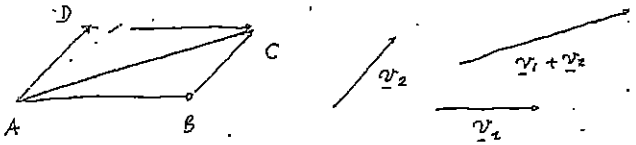
Tale definizione è <u>ben posta</u> poiché non dipende da A : partendo da $A' \neq A$ si ottiene $A'C' \sim AC$ sicché $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$.



L'addizione gode delle seguenti proprietà:

i) <u>commutativa</u>: $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_1 \quad (= \overrightarrow{AC})$

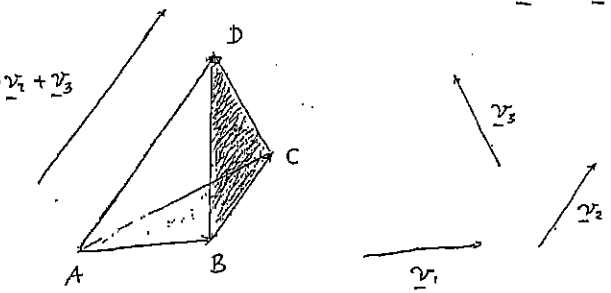
(regola del parallelogramma)



ii) <u>associativa</u>

$$(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \underline{v}_3 = \underline{v}_1 + (\underline{v}_2 + \underline{v}_3)$$

($\Rightarrow$ ha senso la scrittura $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3$)



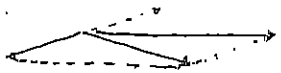
$\overrightarrow{AD} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3$

iii) $\underline{0} + \underline{v} = \underline{v}$

iv) $\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$

opposto di $\underline{v}$

- differenza di due vettori $\quad v_1 - v_2 := \underline{v}_1 + (-v_2)$



* Definiamo la <u>moltiplicazione per uno scalare</u> (reale)

Sia $\underline{v} \in \mathcal{S}$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

$\underline{v}' := \alpha \underline{v}$ è il vettore che ha la stessa direzione di $\underline{v}$, e verso concorde o opposto a seconda che $\alpha \gtrless 0$ (se $\alpha = 0$ si pone $\underline{v}' = \underline{0}$) e $|\underline{v}'| = |\alpha| |\underline{v}|$

(ciò non dipende dall'unità di misura scelta)

Anche tale operazione risulta ben posta.

Valgono le seguenti proprietà:

- <u>associativa</u> $\quad \alpha_1(\alpha_2 \underline{v}) = (\alpha_1 \alpha_2)\underline{v}$

- <u>distributive</u> $\begin{cases} (\alpha_1 + \alpha_2)\underline{v} = \alpha_1 \underline{v} + \alpha_2 \underline{v} \\ \alpha(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \alpha \underline{v}_1 + \alpha \underline{v}_2 \end{cases}$

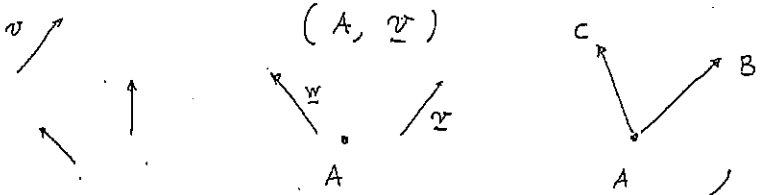
Inoltre:

- $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$
- $0\,\underline{v} = \underline{0}$
- $(-1)v = -\underline{v}$

Analoghe operazioni per i vettori applicati in un punto fissato.

In definitiva, abbiamo tre tipi di "oggetti" soggiacenti alla stessa struttura (gli "spazio vettoriale") che verrà enunciata tra un momento:

$\mathcal{S}$	$\mathcal{S}_A$	$\mathcal{S}_A$
spazio vettoriale geometrico	vettori applicati in A	segmenti orientati aventi la stessa origine A
vettori $\underline{v}$	$(A, \underline{v})$	



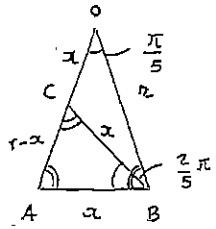
possono essere di fatto identificati:
è ciò che si fa comunemente nelle applicazioni

[di fatto, tali spazi risulteranno isomorfi]

◆ Degressione: la sezione aurea

Determiniamo l_{10}, lato del decagono regolare di raggio r

Analisi



$$\frac{x}{r-x} = \frac{r}{x}$$

$$\left[x^2 = r\underbrace{(r-x)}_{\text{"parte residua"}} \right]$$

$\boxed{x: \text{ sezione aurea di } r}$

$$x^2 + rx - r^2 = 0$$

$$x = \frac{-r \pm \sqrt{r^2+4r^2}}{2} = -\frac{r}{2} \pm \frac{r\sqrt{5}}{2} = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right) r$$

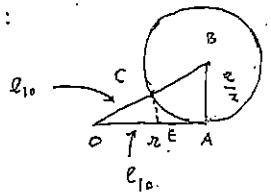
la radice negativa si scarta; si prende

$$x = l_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} r$$

☆ l_{10} è la sezione aurea del raggio

Per costruirla da $x = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - \frac{r}{2}$

si procede così:

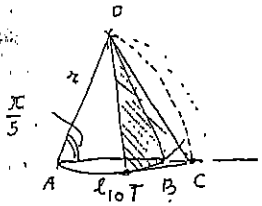


Costruire ℓ_5, a partire da r e ℓ_{10} è immediato (v. anche oltre).

Dimostriamo che

$$(*) \quad \left[\ell_5^2 = \underset{\ell_6^2}{\underset{\parallel}{r^2}} + \ell_{10}^2 \right] \quad (\Rightarrow \ell_5 \text{ è facilmente costruibile anche da } (*))$$

$$\left(\Rightarrow \ell_5 = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \cdot r \right)$$



$\overline{OA} = \overline{AC} = r$

$\overline{OC} = \ell_5$

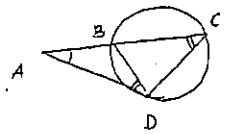
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{TC}} = \frac{\overline{TC}}{\overline{BC}} \quad (\text{teorema della tangente - secante})^{(**)}$$

$$\ell_{10}^2 = r(r - \ell_{10}) = \overline{TC}^2 \quad \therefore$$

$$\overline{TC} = \ell_{10}$$

Ma OTC è rettangolo in T, da cui $*$).

(**) Dim

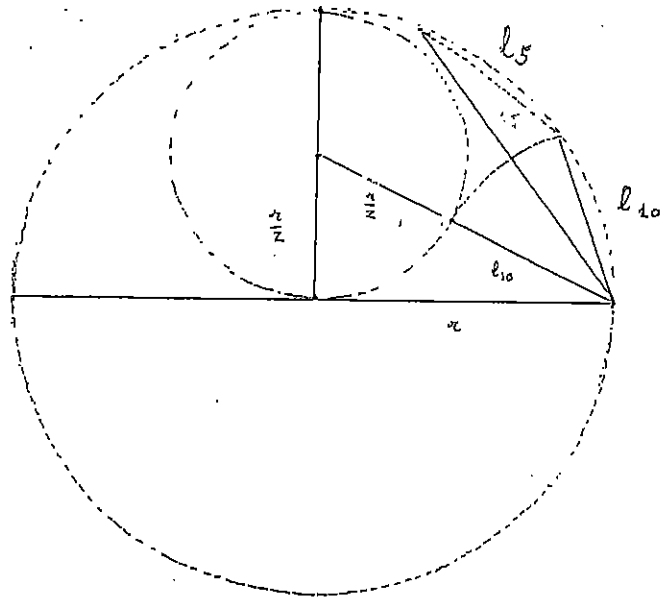


$A\hat{C}D = B\hat{D}A \Rightarrow$

$\overset{\Delta}{ABD}$ e $\overset{\Delta}{ACD}$ sono simili $\Rightarrow$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$$

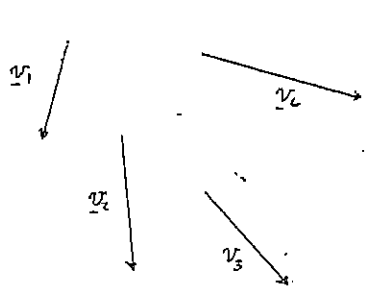
In definitiva, per costruire ℓ_{10} e ℓ_5 possiamo procedere nel modo seguente



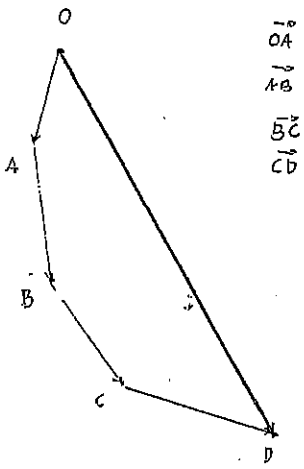
$$\ell_{10} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - \frac{r}{2}$$

- Sulla somma dei vettori geometrici

* ESEMPI ED ESERCIZI



[Il "poligono delle forze"]



$\overrightarrow{OA} = \underline{v}_1$

$\overrightarrow{AB} = \underline{v}_2$

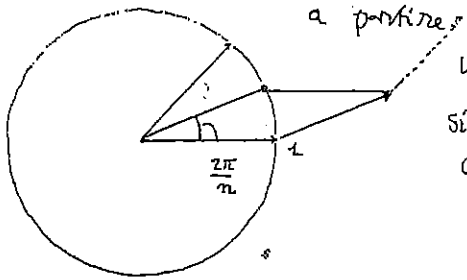
$\overrightarrow{BC} = \underline{v}_3$

$\overrightarrow{CD} = \underline{v}_4$

$$\overrightarrow{OD} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 + \underline{v}_4$$

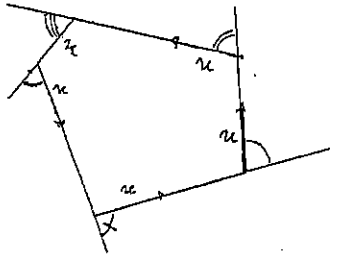
- Dimostrare geometricamente che la somma delle radici n-esime dell'unità (in $\mathbb{C}$), con $n \geq 2$, vale 0.

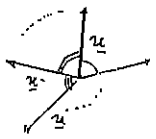
Sol. Tali radici si dispongono su un poligono regolare di n lati; se n è pari il risultato è evidente; In generale, il "poligono delle forze costruito a partire da 1 fornisce un poligono regolare simile al dato, e concludiamo.



- Dato un qualsiasi poligono convesso, la somma degli angoli esterni di questo vale 4 retti (2π)

Sol:





$$\boxed{A \Rightarrow B}$$

A implica B (B è implicato da A)

A solo se B

B è condizione necessaria per A

A è cond. sufficiente per B

B se A

se A allora B

} locuzioni equivalenti

$$\boxed{A \Leftrightarrow B}$$

A se e solo se B

"solo se"

"se"

$A \Rightarrow B$ A solo se B

$B \Rightarrow A$ A se B

Promemoria

Spazi affini

Sia $A \neq \emptyset$

A è detto (*) spazio affine su uno spazio vettoriale (V, K) (o, modellato su (V, K)) se esiste un'applicazione

$$\Phi : A \times A \longrightarrow V$$
$$(P, Q) \longmapsto \overrightarrow{PQ} \equiv \Phi(P, Q)$$
$$\overrightarrow{PQ} = Q - P \quad \text{* altra notazione}$$

che soddisfi

i) $\forall P \in A$, $\forall v \in V$, $\exists!\ Q \in A$ tale che $\overrightarrow{PQ} = v$

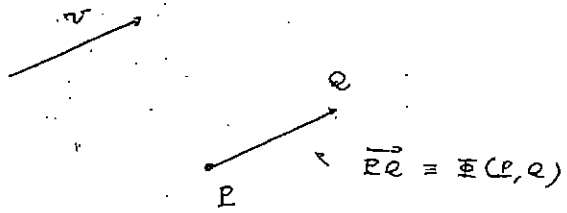
ii) $\forall$ terna P, Q, R in A vale la regola del parallelogramma (Chasles)

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

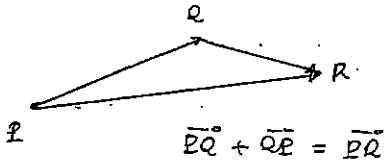
Gli elementi di A vengono chiamati punti. Nella definizione di Φ, P è detto punto iniziale e Q punto finale; P è detto anche punto di applicazione del vettore $\Phi(P, Q) \equiv \overrightarrow{PQ}$

* In modo più formale, si dovrebbe scrivere, pers. (A, V, Φ) ma, qualora non si ingeneri confusione, continueremo a scrivere semplicemente A, sottintendendo la struttura.

i) si formula, a parole, così: dato un punto P e un vettore $v \in V$, esiste ed è unico il punto $Q \in A$ tale che il vettore $\overrightarrow{PQ}$ coincida con v



La ii) si visualizza facilmente...



In particolare, se $P = Q = R$ è $\overrightarrow{PP} = \underline{0}$ e, ponendo $R = P$, si ha

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \underline{0}$$
$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$$

Si definisce dimensione di A, e si denota con $\dim A$, la dimensione di V, $\dim V$ (la dimensione dello spazio vettoriale modellante)

Dunque:

$$\dim A := \dim \bar{V}$$

• Esempi

* è l'esempio fondante della nozione astratta

1. Lo spazio della geometria euclidea "classica"

In questo caso $V = \mathcal{S}$: spazio vettoriale geometrico

Qui $\overrightarrow{PQ}$ è il vettore individuato da P e Q (nell'ordine dato), ovvero la classe di equipollenza determinata dal segmento orientato PQ. Le proprietà i) e ii) sono chiare. ~~Ad esempio, la ii) non è~~ altro che la somma di due vettori geometrici

2. Sia $A \equiv V_a = V$: ovvero,* uno spazio vettoriale può essere visto come spazio affine su se stesso

Basta definire $\Phi : \overset{A}{\overset{\shortparallel}{V}} \times \overset{A}{\overset{\shortparallel}{V}} \to V$ come segue:

$$\Phi(v, w) := w - v \qquad \text{(differenza)}$$

Φ verifica la i): infatti, fissato $x \in A = V$, e fissato $v \in V$, esiste ed è unico $w \in A = V$ tale che $w - x = v$; si ha $w = x + v$

Φ verifica anche ii):

posto $P = x$, $Q = w$, $R = v$, si ha

$$\overrightarrow{PQ} = w - x$$
$$\overrightarrow{QR} = v - w$$
$$\overrightarrow{PR} = v - x$$

da cui

$$\underbrace{w - x}_{\overrightarrow{PQ}} + \underbrace{v - w}_{\overrightarrow{QR}} = \underbrace{v - x}_{\overrightarrow{PR}}$$

In particolare, se $V = K^n$, si parla di spazio affine numerico

3. Questo esempio è più astratto:

Sia $V = \mathbb{R}$ $\quad A := \left\{ D_a := \frac{d}{dt} + a \right\}_{a \in \mathbb{R}}$

operatore differenziale su $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

$$(D_a f)(t) := f'(t) + a f(t)$$

$$\Phi(D_a, D_b) := b - a \quad (\in \mathbb{R})$$

Φ verifica i) e ii)

infatti, posto $P = D_a$, $v = b$, $\exists!\ Q = D_c$ tale che $\overrightarrow{PQ} = b$: basta porre $c = a + b$

Infatti $\overrightarrow{PQ} = c - a = a + b - a = b$

ii) è pure immediata:

posto
$$P = D_a$$
$$Q = D_b$$
$$R = D_c$$

Si ha: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = b - a + c - b = c - a = \overrightarrow{PR}$

Si noti (cf. esempi 1 e 3) che gli elementi di A possono avere "natura" diversa da quelli di V

◆ Def. Sia A uno spazio affine modellato su (V, K) e sia $W \leq V$

i) Dato $P \in A$, dicesi sottospazio affine passante per P di giacitura W il sottoinsieme di A così definito:

$$S_P^{(W)} := \{ Q \in A \mid \underset{\in (P,Q)}{\overrightarrow{PQ}} \in W \}$$

ovvero, $S_P^{(W)}$ consiste di tutti e soli i punti di A tali che il vettore $\overrightarrow{PQ}$ appartenga al sottospazio W. Altra notazione: $P + W$

ii) Dicesi sottospazio affine di A un sottoinsieme S di A della forma $S_P^{(W)}$ per qualche P e per un certo W.
W è detta giacitura di S. S è certamente non vuoto

Osserviamo subito che:

◆ Proposizione $S_P^{(W)} = S_Q^{(W)} \iff \overrightarrow{PQ} \in W$

Dim. ($\Rightarrow$) $Q \in S_P^{(W)}$, pertanto $\overrightarrow{PQ} \in W$ per definizione

($\Leftarrow$) Sia $R \in S_Q^{(W)}$. Dunque $\overrightarrow{QR} \in W$.
Ma allora (poiché $W \leq V$) $\overrightarrow{PR} = \underset{\in W}{\overrightarrow{PQ}} + \underset{\in W}{\overrightarrow{QR}} \in W$

Pertanto $Q \in S_P^{(\bar W)}$, da cui $S_Q^{(\bar W)} \subseteq S_P^{(\bar W)}$.

Analogamente $S_P^{(\bar W)} \subseteq S_Q^{(\bar W)}$, sicché

$$S_P^{(\bar W)} = S_Q^{(\bar W)}$$

Q.E.D.

Da ciò segue subito che, $Q \in S_P^{(\bar W)} \iff$

$$S_Q^{(\bar W)} = S_P^{(\bar W)} \iff \overrightarrow{PQ} \in \bar W$$

In altre parole, un sottospazio affine avente una certa giacitura può vedersi come sottospazio affine passante per uno qualsiasi dei suoi punti.

- Un notevole caso particolare è fornito dai sottospazi affini di uno spazio vettoriale $\bar V$, letto come spazio affine. In tal caso un sottospazio affine S è un insieme (non vuoto) della forma

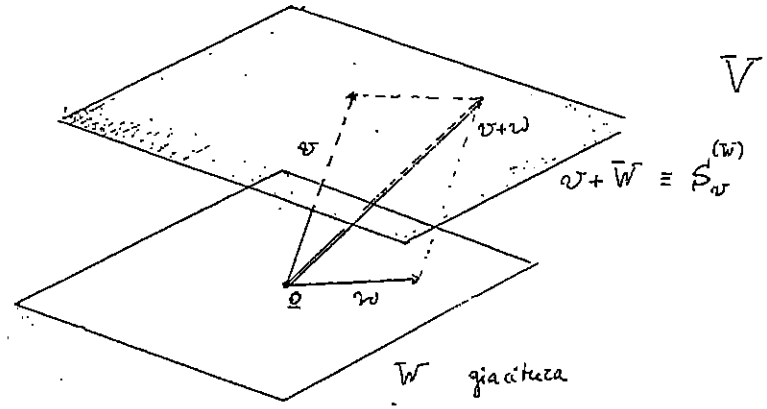
$$S = S_v^{(\bar W)} \equiv v + \underset{\text{giacitura}}{\bar W}$$

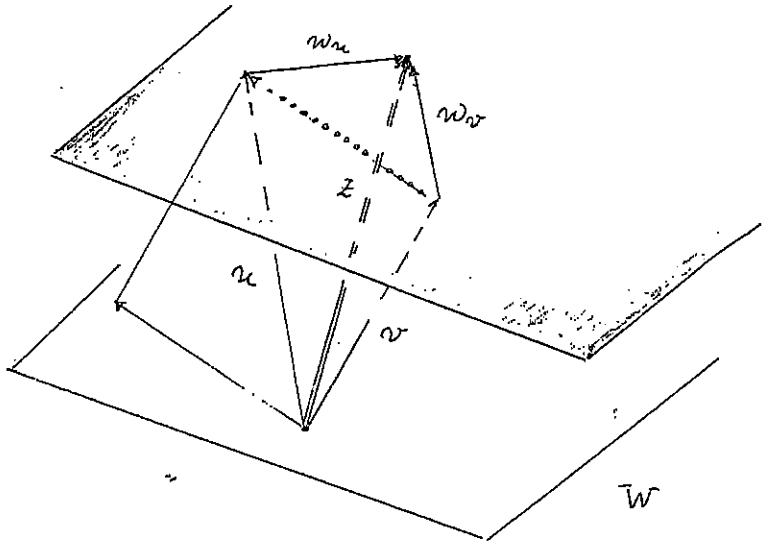
$$= \{ u \in \bar V \mid u = v + w \text{ per qualche } w \in \bar W \}$$

somma di vettori

Esso prende anche il nome di <u>varietà lineare</u>.

Notiamo che, in questo esempio i <u>sottospazi vettoriali</u> di $\bar V$ sono esattamente i <u>sottospazi affini passanti per O</u>





$$z = u + w_u = v + w_v$$

$$\Rightarrow \quad u - v = w_v - w_u \in W$$

v. anche la figura...

- Si definisce dimensione di S la dimensione di W (giacitura). In simboli:

$$\dim S := \dim W$$

Casi particolari

* Se $\dim S = 0$, cioè $W = \{\underline{0}\}$, è

$S = \{Q\}$ con $Q \in A$.

Con abuso di linguaggio, S è detto punto (c'è differenza, a rigore, tra Q e $\{Q\}$...)

* Se $\dim S = 1$ (ossia $\dim W = 1$), S è detto retta (affine), e W è, in tal caso, chiamato direzione di W

* Se $\dim S = 2$ ($\dim W = 2$), S è detto piano (affine)

- Esempi

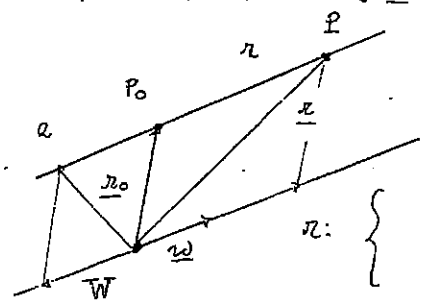
1. Sia A lo spazio affine della geometria euclidea

- I suoi punti possono essere interpretati come sottospazi affini di dimensione 0 ("un punto non ha direzione")

- I suoi sottospazi affini di dimensione 1 sono precisamente le rette (da qui anche la scelta del nome nel caso generale).

Infatti, una retta r può descriversi fissandone un suo punto P_0 e dandone la direzione: un sottospazio vettoriale di dimensione 1

$W = \langle \underline{w} \rangle$ ($\underline{w} \neq \underline{0}$)



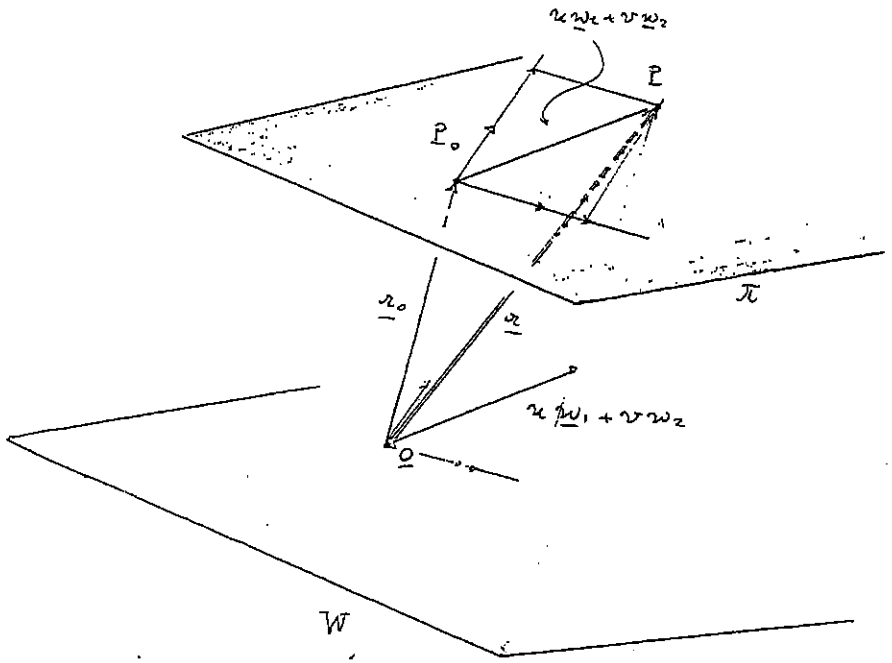
fissando un'origine arbitraria, possiamo descriverla così (equazione parametrica in forma vettoriale)

$$r: \begin{cases} \underline{r} = \underline{r}_0 + t\,\underline{w} \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- I suoi sottospazi affini di dimensione 2 sono precisamente i piani

Un piano π risulta determinato assegnandone un punto e la giacitura, ossia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{S}$ di dimensione 2: $\overline{W} = \langle \underline{w}_1, \underline{w}_2 \rangle$ (sia $(\underline{w}_1, w_2)$ una sua base). Fissando un'origine, si ottiene un'equazione parametrica in forma vettoriale

$$\pi: \quad \left\{ \quad \underline{r} = \underline{r}_0 + u\,\underline{w}_1 + v\,\underline{w}_2 \qquad u, v \in \mathbb{R} \right.$$



◈ Equazioni parametriche di un sottospazio affine.

Sia S un sottospazio affine di $\overline{V} \equiv \overline{V}_a$

$\dim \overline{V} = n$, $\dim S = k$, $k \leq n$
(ossia $\dim \overline{W} = k$ ($\overline{W}$: giacitura di S))

Un riferimento affine è, in generale, l'assegnazione di un punto di A (origine) e di una base di $\overline{V}$ (spazio vettoriale modellante):

$$\left(\underset{\substack{\cap \\ A}}{\overset{\text{origine}}{O}}, \quad \overset{\text{base di } \overline{V}}{e_1, \dots, e_n} \right)$$

Nel nostro caso prendiamo $O = \underline{0}$, per fissare le idee. Sia

$$S = a + \overline{W}$$

Sia $(w_1, \dots, w_k)$ una base di $\overline{W}$

si avrà: $\quad a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$

e

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} w_i^{(j)} e_i \qquad j=1,2,\dots k$$

Se $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in S$, si ha

per t_j, $j=1\dots k$ univocamente determinati

$$(*) \qquad x = a + \sum_{j=1}^{K} t_j w_j \qquad t_j \in K$$

viceversa, al variare dei t_j otteniamo tutti i punti di S

In componenti si ha:

$$(*') \qquad x_i = a_i + \sum_{j=1}^{K} t_j w_i^{(j)} \qquad i=1,2,\dots n$$

ovvero

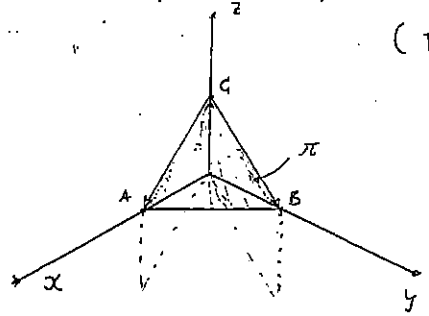
$$(*'') \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{K} t_j \begin{pmatrix} w_1^{(j)} \\ \vdots \\ w_n^{(j)} \end{pmatrix}$$

Le (*) e forme alternative costituiscono equazioni parametriche di S

ovviamente esse non sono uniche!

Non solo dipendono dalla scelta del riferimento affine, ma anche dalla base scelta per W e dal punto a.

- Esempio: scrivere equazioni parametriche per il piano π: $x+y+z=1$ (passante per A, B, C)



$A = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

poniamo per esempio $a = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = C$

Una base per la giacitura di π è fornita per esempio da $\underbrace{A-C}_{w_1}$ e $\underbrace{B-C}_{w_2}$

$$A-C = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \equiv w_1$$

$$B-C = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \equiv w_2$$

[È facile constatare che w_1 e w_2 sono linearmente indipendenti, e che pertanto forniscono una base di detta giacitura.]

Sicché si ha

$$\begin{cases} x = t_1 \\ y = t_2 \\ z = 1 - t_1 - t_2 \end{cases}$$

È chiaro che dalle equazioni scritte si risale immediatamente, in questo caso, all'equazione "affine" $x+y+z=1$

vedremo in seguito come effettuare tale passaggio in modo sistematico

formalmente, potevamo anche procedere così:

W ha equazione $x+y+z=0$ ("equazione omogenea associata").

Una sua base si ottiene ponendo per es:

$x=1,\ y=0,\ z=-1$ e

$x=0,\ y=1,\ z=-1$

soluzione rapida:

$x+y+z=1$

posto, per es. $z = 1-x-y$,

$$\vec{x} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sol. particolare — base di W

Il nostro procedimento mirava ad un'interpretazione geometrica diretta, e ad evitare del tutto la teoria dei sistemi lineari, che non abbiamo ancora discusso.

Con un apparato più ricco, agiremo in modo rapido e spedito: e ancor più se nello stesso tempo continueremo a fare uso dell'intuizione geometrica

Teorema. Sia dato (V, K) e $U_1 \leq V$, $U_2 \leq V$. Siano $\mathcal{V}_1 = x + U_1$, $\mathcal{V}_2 = y + U_2$ varietà lineari (sottospazi affini) $(x, y \in V)$

Allora $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 \iff$ (*) $U_1 = U_2 \equiv U$ e (**) $x - y \in U$

Dim. ($\Rightarrow$) Se $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$ $\exists\ z \in \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$

ovvero $z = x + u_1$ $\quad z - x \in U_1$

$= y + u_2$ $\quad z - y \in U_2$

Ma allora da $x = z - u_1 \equiv z + u_1'$ $\quad (u_1' = -u_1)$

$y = z - u_2 \equiv z + u_2'$ $\quad (u_2' = -u_1)$

segue che $\mathcal{V}_1 = z + U_1$

$\mathcal{V}_2 = z + U_2$

e pertanto, da $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$ segue necessariamente $U_1 = U_2 =: U$; si chiama poi che

$x - y = u_1' - u_2' \in U$

($\Leftarrow$) Viceversa, $\mathcal{V}_1 = x + U = y + \underbrace{(x-y)}_{\in U} + U$

$= y + U = \mathcal{V}_2$

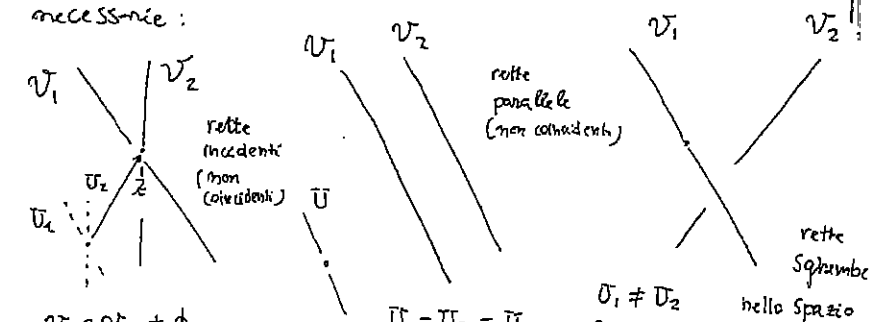
★ In definitiva, V_1 e V_2 coincidono se e solo se hanno un vettore ("punto") in comune e gli stessi spazi direttori (giaciture)

Tale risultato è del tutto generale:

Due sottospazi affini di uno spazio affine dato coincidono $\Leftrightarrow$ hanno un punto in comune (◊) e la stessa giacitura (◊◊)

La dimostrazione è completamente analoga al caso ora visto, in cui V è letto come spazio affine su se stesso.

⚠ Le condizioni (◊) e (◊◊) sono entrambe necessarie:



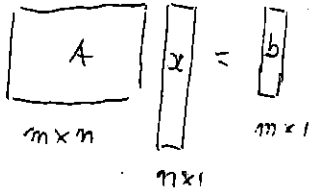
$V_1 \cap V_2 \neq \phi$ ma $U_1 \neq U_2$

$U_1 = U_2 = U$ ma $V_1 \cap V_2 = \phi$

$U_1 \neq U_2$, $V_1 \cap V_2 = \phi$

Conoscendo già la teoria dei sistemi lineari, si ha la seguente:

★ Interpretazione geometrica del teorema di Rouché-Capelli



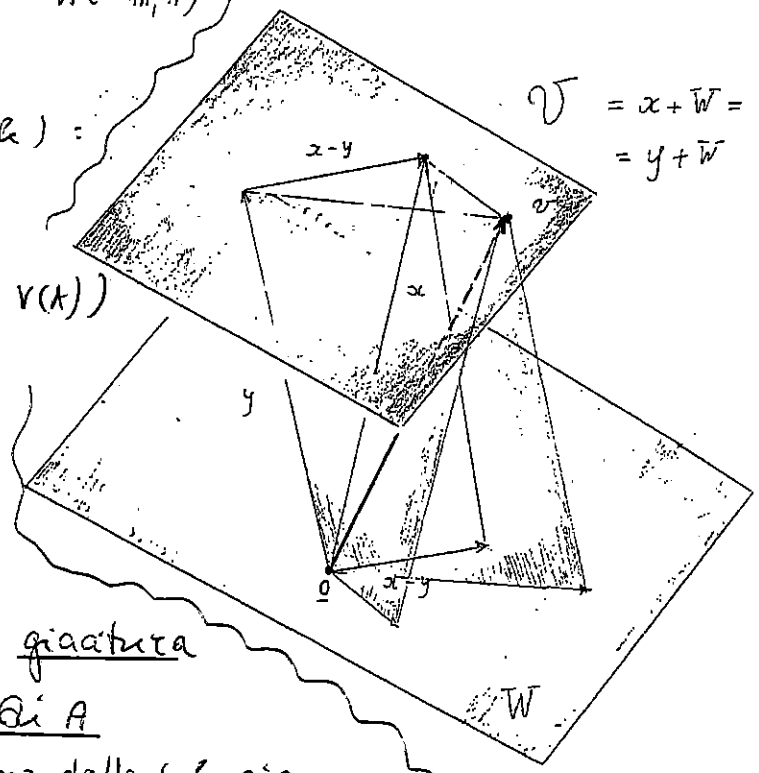
l'insieme delle sol di

$Ax = b \quad A \in M_{m,n}$

o è vuoto (sistema impossibile): $r(A|b) > r(A)$

oppure $(r(A|b) = r(A))$ è un sottospazio affine di K^n

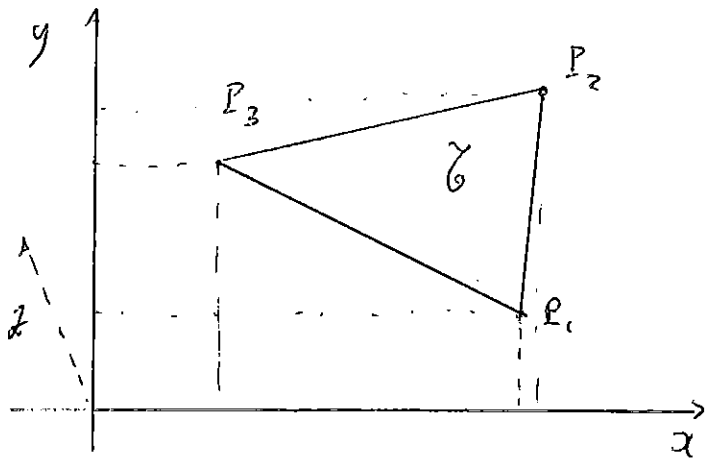
(A è usata come un omomorfismo da K^n a K^m)



avente come giacitura il nucleo di A (i.e. l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato $Ay = \underline{0}$

★ Risoluzione di un sistema lineare ≡ determinazione di equazioni parametriche per il sottospazio affine da questi individuato

Richiamo:



Area orientata di $\mathcal{T}$, $A(\mathcal{T})$

$$\equiv \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$P_i : (x_i, y_i)$

Area di $\mathcal{T}$ posto $\underline{a} = \overrightarrow{P_1 P_2}$, $\underline{b} = \overrightarrow{P_1 P_3}$

$$A = \frac{1}{2}\|\underline{a} \times \underline{b}\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} \right|$$

es: per altra via, si può utilizzare $\|\underline{a} \times \underline{b}\| = \sqrt{\|\underline{a}\|^2\|\underline{b}\|^2 - \langle \underline{a} \mid \underline{b} \rangle^2}$ ...

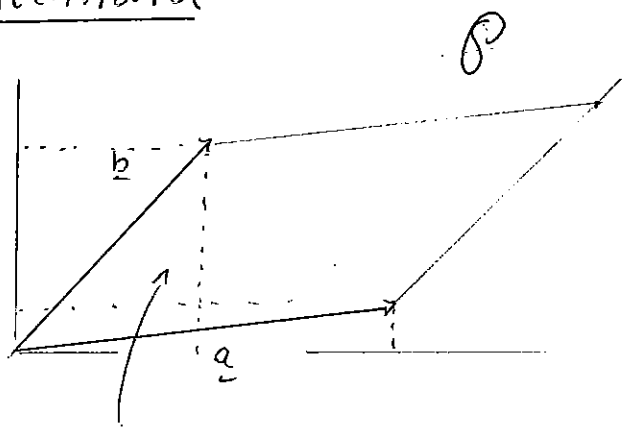
riprendiamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \right|$$

.. se si omettono i | |, si parla di

<u>area orientata</u>



$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

area <u>orientata</u> di $\mathcal{P}$

$$A(\mathcal{P}) = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right| = \det \begin{pmatrix} \underline{a} & \underline{b} \end{pmatrix}$$

$$= a_1 b_2 - a_2 b_1$$

se $A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \end{pmatrix}$

$$\boxed{\det A = \underset{\text{area orientata}}{A(\mathcal{P})}}$$

individuato dalle colonne (o, equival. righe) di A

ciò è vero nello spazio

$$\det A = V(\mathcal{P})$$

$$\begin{pmatrix} \| & \| & \| \end{pmatrix}$$

volume orientato del parallelepipedo $\mathcal{P}$ individuato dalle colonne di A (opp. righe)

|| e, in generale, det A <u>definisce</u> l'ipervolume orientato di un parallelepipedo

Nozioni affini

Siano S, T sottospazi affini di A, di giacitura rispettive W_S e W_T.

Essi sono detti

1) incidenti, se $S \cap T \neq \emptyset$

In tal caso, se $Q \in S \cap T$, è subito

$$S \cap T = Q + W_S \cap W_T$$

ovvero, $S \cap T$ è un sottospazio affine con giacitura $W_{S \cap T} = W_S \cap W_T$

(Infatti da $S = Q + W_S$, $T = Q + W_T$, è $P \in S \cap T \iff \overrightarrow{QP} \in W_S \cap W_T$).

2) paralleli (Si scrive $S \parallel T$)

Se $W_S \leq W_T$ o viceversa (il caso $W_S = W_T$ è pertanto ovviamente ammesso).

In particolare $S \subseteq T \iff \exists\, P \in S \cap T$ e $W_S \leq W_T$. Pertanto $S \subseteq T \Rightarrow S \parallel T$

(Il viceversa è chiaramente falso)

3) sghembi se $S \cap T = \emptyset$ e S non è parallelo a T

⚠ Attenzione: $\parallel$ è riflessiva ($S \parallel S$) e simmetrica ($S \parallel T \Rightarrow T \parallel S$) ma non è transitiva, in generale

(per esempio, due rette sghembe sono parallele ad un medesimo piano).

* Lo è però per sottospazi della stessa dimensione

(Verificheremo in seguito che tali nozioni sono "invarianti per affinità" ovvero, per trasformazioni affini.)

Sia $\mathcal{V} = \{ (1+a, -2+b, 2-b, c) \mid a+b+c=1 \}$

posto $c = 1 - a - b$ è

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ -b \\ -a-b \end{pmatrix} \right\}_{a,b \in \mathbb{R}}$$

$\mathcal{V}$ è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ di dim. 2 (un piano), con giacitura $W =$

$$\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{base di } W} \right\rangle \equiv W$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ -b \\ -a-b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

verifichiamo se $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$

Deve essere: $a = 1 \quad b = -2$

infine $1 = -1 + 2 = 1$ ok

Perciò $\mathcal{V} = W$

Di fatto, si è risolto un semplice sistema lineare.

Procediamo anche in quest'altro modo: verifichiamo, con l'algoritmo di Gauss, che $\langle W, v \rangle = W$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & +2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$ uno multiplo dell'altro

da cui l'asserto.

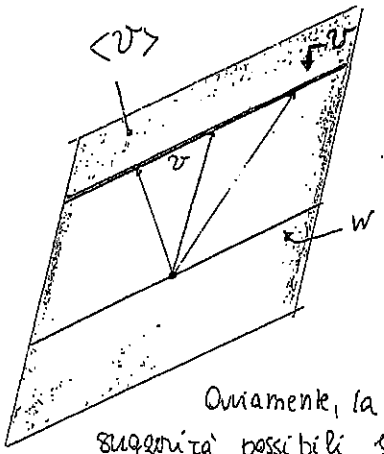
- In generale, per controllare, data $\mathcal{V} = v + W$,

se $\mathcal{V} = W$ (cioè se $v \in W$)

si deve risolvere un sistema lineare, oppure (ma anche il sistema si può risolvere così..) controllare, con l'algoritmo di Gauss, se

$$\langle W, v \rangle = W$$

Notare che se $v \notin W$ è $\dim \langle W, v \rangle = \langle \mathcal{V} \rangle$
$= \dim W + 1$



Ovviamente, la natura del problema suggerirà possibili semplificazioni "ad hoc".

- Estensione al caso di un sottospazio affine dell'algoritmo rapido

$$\mathcal{U} = v + U \qquad U \leq K^n$$

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$x = a + U \iff x - a \in U$$

Si trovano equazioni affini di U utilizzando incognite $X_1 \dots X_n$ $\left(X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$

Quindi si pone $X = x - a$

(si opera un cambiamento di rif. affine tramite una <u>traslazione</u>)

◈ Modelli per la geometria euclidea nel piano e nello spazio I.

La geometria euclidea può essere "recuperata" tramite le nozioni precedentemente introdotte nel modo seguente (per il momento ci occupiamo degli assiomi I, II, V.)

★ Nel piano. Sia A spazio affine reale di dimensione 2.

- Punto = punto di A
- retta = "retta" di A (s.spazio affine di dimensione 1)

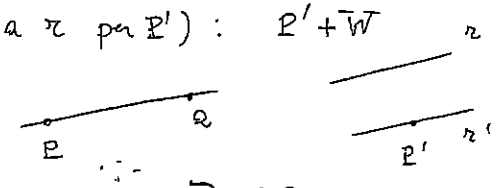
★ in generale parallelismo = parallelismo in termini di relazione di inclusione tra "giaciture".

II: $r: \quad P + W = \{P + tw\}_{t \in \mathbb{R}}$, $w \neq 0$

I: Siano $P \neq Q$. La retta che li congiunge è $r: \quad P + W$, $W = \langle \vec{PQ} \rangle$

V: $r: \quad P + W$, $P' \notin r$

r' (parallela a r per P'): $P' + W$



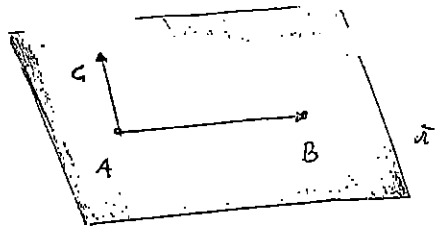
Nello spazio. Stesse nozioni ...

$\dim_{\mathbb{R}} A = 3$; in più

- piano = "piano" di A (s.spazio affine di dimensione 2)

È immediato verificare che, per esempio, tre punti distinti e non allineati individuano un solo piano: siano A, B, C tali punti, è $\pi: \quad A + W$

con $W = \langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle$, per esempio

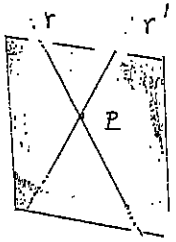


Ritroviamo, a titolo di esempio, i seguenti teoremi di Euclide

◇ <u>Teorema</u> (Euclide XI.2)

Siano, nello spazio, r e r' incidenti .. $(r \cap r' \neq \emptyset)$

Allora esse sono complanari e il piano che le contiene è unico, se sono distinte.



Dim. Per ipotesi esiste $P \in r \cap r'$

Le due rette sono allora date da

$r: \quad P + U \qquad U \leq V \qquad \dim U = 1$

$r': \quad P + U' \qquad U' \leq V \qquad \dim U = 1$

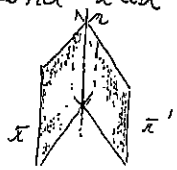
Se $U = U'$, $r \equiv r'$ e sono certamente complanari: basta considerare un qualsiasi $\pi: \; P + W$, con $U < W$ $\dim W = 2$

(la totalità di tali π forma allora il fascio di piani di asse r).

Se $U \neq U'$ è necessariamente $U \cap U' = \{0\}$ sicché $W = U + U' = U \oplus U'$ è la giacitura del piano richiesto: $\pi: \; P + W$ (che è chiaramente univocamente determinato).

◇ <u>Teorema</u> (Euclide XI.3). Siano dati, nello spazio, due piani incidenti e distinti π, π' (essi non possono pertanto risultare paralleli).

Allora essi hanno esattamente una retta in comune $(\pi \cap \pi' = r)$.



Dim. Sia $P \in \pi \cap \pi'$. Si ha

$\pi: \quad P + W \qquad \dim W = 2$

$\pi': \quad P + W' \qquad \dim W' = 2$ e $W \neq W'$

e $\pi \cap \pi' = P + \underbrace{W \cap W'}_{\substack{\cap \\ V}}$ $\qquad W \cap W' \leq W$, $\leq W'$

Dimostriamo allora che $\dim W \cap W' = 1$

(e allora $r: \; P + W \cap W'$)

La formula di Grassmann fornisce

$$2 \geq \dim(W \cap W') = -\dim(W + W') + \dim W + \dim W'$$
$$\geq -3 + 4 = 1$$

Ma $\dim(W \cap W') = 2$ implicherebbe $W = W'$ (*) e dunque il parallelismo di π e π', sicché (*) è $1 \leq \dim(W \cap W') \leq 1$, ovvero

$$\boxed{\dim(W \cap W') = 1}$$

per ovvie ragioni dimensionali cf. teor. di Steinitz

Commento

Notiamo che l'introduzione dei modelli con cui, per ora parzialmente, abbiamo ricostruito la geometria classica, spiega la locuzione, usata nella disp. 1

" l'approccio algebrico sostituisce, o meglio ripristina la sintesi.."

Le dimostrazioni che abbiamo svolto hanno carattere intrinseco: non dipendono dalle basi scelte per le giaciture, fanno intervenire solo concetti "globali".

Il discorso può non è concluso: dobbiamo esaminare le trasformazioni lineari tra spazi vettoriali, affini e, in seguito, proiettivi.

Ciò, se si vuole, è nello spirito del cosiddetto Programma di Erlangen di F. Klein, in cui studiare particolari

proprietà geometriche delle figure si traduce nell'esame delle proprietà invarianti rispetto ad un gruppo di trasformazioni.

Tale approccio è la versione astratta delle problematiche della geometria descrittiva, che tipicamente mirano a ricostruire una data figura da varie "proiezioni" (e quindi da altre figure a questa collegate).

Essenziale è la nozione di gruppo, che ha origine nell'opera di E. Galois, e che si è dimostrata particolarmente fruttuosa proprio nell'incontro con la geometria.

Geometria affine ed euclidea

Sia dato uno spazio vettoriale euclideo

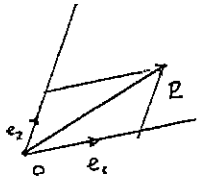
Def. Uno spazio affine modellato su uno spazio vettoriale euclideo è detto spazio (affine) euclideo, e spesso denotato con E.

Def. Ricordiamo che un sistema di coordinate affini, o riferimento affine (in uno spazio affine A), è dato da

$$(\underset{\substack{\cap \\ A}}{O}, \underbrace{e_1 \dots e_n}_{\text{base di } V})$$

"origine" (arbitraria)

V: spazio vettoriale modellante



Si ha allora

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \qquad (a_1 \dots a_n): \text{ coordinate affini}$$

In uno spazio euclideo E, con $e = (e_1 \dots e_n)$ base ortonormale, si parla di riferimento cartesiano (o di sistema di coordinate cartesiane)

In A^n il riferimento affine standard è $(\underset{(0,\dots 0)}{O}, \text{base canonica})$

e coincide col riferimento cartesiano standard in $E^n = (\mathbb{R}^n, \langle\,|\,\rangle_{\text{standard}})$ (visto come spazio affine su se stesso)

◈ Isomorfismo di spazi affini

Sia $f : A \to A'$ spazi affini su V, V'; rispettivamente

tale che $\exists\ \varphi : V \to V'$ isomorfismo

tale che
$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ})$$

una f siffatta è detta isomorfismo di spazi affini.

Se $A = A'$ si parla di affinità

Se $\varphi \in End(V)$ è generica, si parla di semiaffinità.

◈ Teorema Ogni spazio affine di dimensione finita è isomorfo ad $\mathbb{A}^n$ ($= K^n$, letto come spazio affine su se stesso)

Dim. Fissiamo un riferimento affine $(O, e_1 \dots e_n)$ in A.

Sia $P \in A$; è $\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

scriviamo $P = P(x_1 \dots x_n)$ $\quad (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{A}^n$

analogamente, se $Q \in A$,

$\overrightarrow{OQ} = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, $\quad (y_1 \dots y_n) \in \mathbb{A}^n$

Poniamo $\varphi : V \to K^n$
$v \mapsto (\alpha_1 \dots \alpha_n)$

$\left(v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right)$ (isomorfismo indotto dalla scelta di $e = (e_1 \dots e_n)$)

Definiamo allora

$$f(P(x_1 \dots x_n)) = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{A}^n$$

Si ha subito

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = (y_i - x_i)_{i=1 \dots n} \equiv \varphi(\overrightarrow{PQ})$$

Un'affinità è pertanto completamente determinata da $f(O)$ $\quad O \in A$ qualsiasi e da $\varphi \in GL(V)$.

L'insieme delle affinità costituisce un gruppo, il gruppo affine $Aff(A)$

vediamo in dettaglio:

$$Aff(A) = \{ f_{(A,c)} \mid \underset{\varphi}{A} \in GL(V) \ , \ c \in V \}$$

lavoriamo su $A \equiv V$ per semplicità e $K = \mathbb{R}$

$$f_{(A,c)}(\underset{A}{x}) := Ax + c$$

osservare che

$$(f_{(B,d)} \circ f_{(A,c)})(x) = f_{(B,d)}(Ax + c) =$$

$$= B(Ax + c) + d = BAx + Bc + d$$

$$= f_{(BA,\ Bc+d)}(x)$$

(*) identità (elemento neutro)

$f_{(I,\ 0)}$ infatti $f_{(I,0)}(x) = Ix + 0 = x$

(*) Inverso di $f_{(A,c)}$: è $f_{(A^{-1},\ -A^{-1}c)}$

Infatti da $BA = I$, $Bc + d = 0$

segue subito $B = A^{-1}$ $\quad A^{-1}c + d = 0$

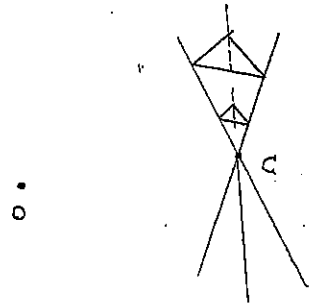
$\Rightarrow d = -A^{-1}c$

Elementi particolari

- traslazioni : $f_{I,c}$: $x \mapsto x + c$
- omotetie (di centro c = c)

$f_{(\lambda I,\ -\lambda c)}$: $x \mapsto \lambda x - \lambda c = \lambda(x - c)$

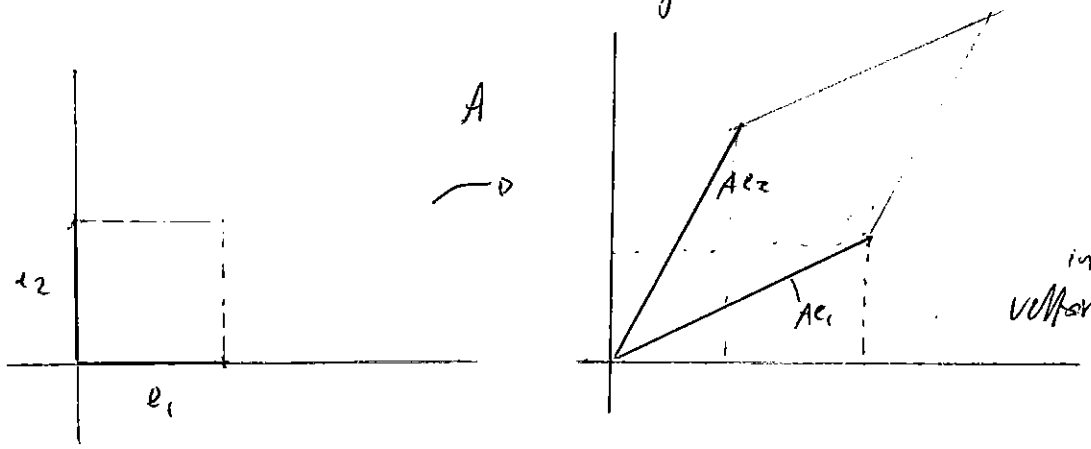
$\lambda \in \mathbb{R}$



Se $\lambda = -1$ si ha una simmetria di centro c

La geometria affine è lo studio delle proprietà invarianti per affinità (secondo il punto di vista di F. Klein)

Matrici come trasformazioni geometriche : richiamo



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

immagini dei vettori della base canonica

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto Ae_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

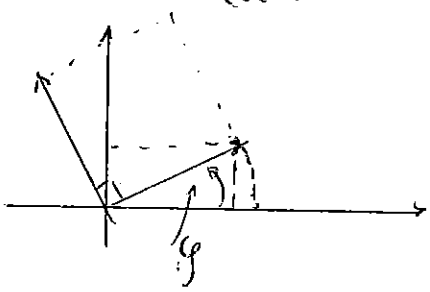
$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto Ae_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}$$

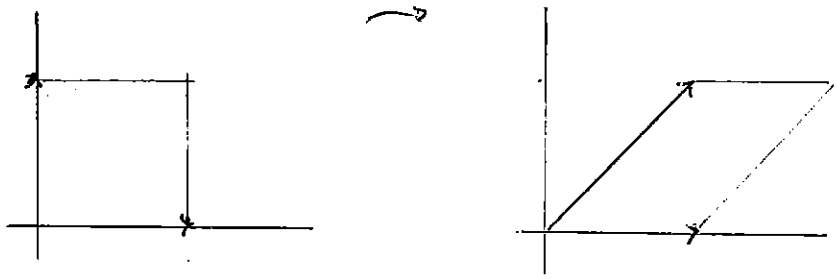
$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

<u>rotazione</u> di φ (a meno di $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$)



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

"distorsione"
shear



$$A \begin{pmatrix} | & | & | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & | & A & | & \cdots \end{pmatrix}$$

punti di un'immagine X — punti trasformati