

Analisi Matematica per Bio-Informatici

Esercitazione 13 – a.a. 2007-2008

Dott. Simone Zuccher

28 Febbraio 2008

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Integrali definiti

Richiami utili sugli integrali definiti. Siano $f(x), g(x)$ limitate ed integrabili su $I \subseteq \mathbb{R}$ e $a, b, c \in I$, $a < b$. Allora:

- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.
- $\int_a^a f(x) dx = 0$.
- $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.
- Se $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ con $a < b$, $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.
- $g(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x) dx \geq 0$.
- $\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$.
- $m \leq \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right] \leq M$ con $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ e $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.
- $f(x)$ continua su $[a, b] \Rightarrow \exists c \in [a, b] : \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$.

- Integrazione per parti: $\int_a^b [f'(x) \cdot g(x)] dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b [f(x) \cdot g'(x)] dx$.
- Integrazione per sostituzione. Sia $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ derivabile con derivata continua. Allora: $\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} [f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)] dt$
- Teorema fondamentale del calcolo integrale. Sia $f(x)$ continua ed integrabile su $[a, b]$ e $c, x \in [a, b]$, allora la funzione $F(x) = \int_c^x f(t) dt$ è una primitiva di $f(x)$. Inoltre, $F(x)$ è derivabile e risulta $F'(x) = f(x)$.
- Formula fondamentale per il calcolo integrale. Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ allora $\int_a^b f(x) dx = F|_a^b = [F]_a^b = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$.
- Significato geometrico: l'integrale definito $\int_a^b f(x) dx$ di una funzione *non negativa* $f(x)$ rappresenta l'area compresa tra il grafico della funzione $y = f(x)$, l'asse x e le rette verticali $x = a$ e $x = b$.
- Area tra due curve $f(x)$ e $g(x)$. Se le curve hanno due o più punti di intersezione di ascissa $x_i, i = 1, \dots, n, n \geq 2$, allora

$$A = \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| dx + \int_{x_2}^{x_3} |f(x) - g(x)| dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} |f(x) - g(x)| dx.$$

Si noti che $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$ se $f(x) \geq g(x)$ oppure $|f(x) - g(x)| = g(x) - f(x)$ se $g(x) > f(x)$. Quindi, basta considerare per ciascun intervallo la differenza tra la funzione "maggiore" e quella "minore".

Esercizio 1.1 Calcolare $\int_0^{2\pi} \sin x dx$.

Risoluzione. Essendo $\int \sin x dx = -\cos x + c$, si ha $\int_0^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0$. ■

Esercizio 1.2 Calcolare $\int_0^{2\pi} (\sin x)^2 dx$.

Risoluzione. Essendo $\int (\sin x)^2 dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$ (si vedano le esercitazioni precedenti), si ha $\int_0^{2\pi} (\sin x)^2 dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi$. ■

Esercizio 1.3 Calcolare $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$.

Risoluzione. Essendo $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{2(x+1)^{3/2}}{3} - 2\sqrt{x+1} + c$ (si vedano le esercitazioni precedenti, integrali per sostituzione), si ha $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \left[\frac{2(x+1)^{3/2}}{3} - 2\sqrt{x+1} \right]_0^3 = \left[\frac{2(4)^{3/2}}{3} - 2\sqrt{4} \right] - \left[\frac{2(1)^{3/2}}{3} - 2\sqrt{1} \right] = \frac{8}{3}$. ■

Esercizio 1.4 Calcolare $\int_0^3 |x-1| dx$.

Risoluzione. Essendo $|x-1| = x-1$ per $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ e $|x-1| = 1-x$ per $x-1 < 0 \Rightarrow x < 1$, si ha $\int_0^3 |x-1| dx = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^3 (x-1) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^3 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$. ■

Esercizio 1.5 Calcolare $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$.

Risoluzione. Si può procedere separando il $|\sin x|$ nei due casi (come fatto nell'esercizio precedente), oppure osservare che $f(x) = |\sin x|$ è periodica di periodo π per cui: $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^\pi |\sin x| dx + \int_\pi^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^\pi |\sin x| dx + \int_0^\pi |\sin x| dx = 2 \int_0^\pi |\sin x| dx = 2 \int_0^\pi \sin x dx$ ($\sin x \geq 0 \forall x \in [0, \pi]$) $= [-2 \cos x]_0^\pi = -2 \cos(\pi) + 2 \cos(0) = 2 + 2 = 4$. ■

Esercizio 1.6 Determinare l'area della regione di piano compresa tra la curva $y = \log x$, l'asse delle ascisse e la retta $x = e$.

Risoluzione. $A = \int_1^e \log x dx = [x(\log x - 1)]_1^e = 1$. ■

Esercizio 1.7 Determinare l'area della regione di piano compresa tra la parabola $y = x^2$ e la retta $y = x$.

Risoluzione. Si noti che le due curve si intersecano in due punti $(0,0)$ e $(1,1)$ e che nell'intervallo $[0,1]$ si ha $x \geq x^2$. Quindi l'area in questione è $\int_0^1 |x^2 - x| dx = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. ■

Esercizio 1.8 Determinare l'area della regione di piano compresa tra la parabola $y = x^2$ e la retta $y = -2x + 3$.

Risoluzione. Le due curve si intersecano in $(-3, 9)$ e $(1, 1)$, inoltre nell'intervallo $[-3, 1]$ si ha $-2x + 3 \geq x^2$. Quindi l'area in questione è $\int_{-3}^1 (-2x + 3 - x^2) dx = \left[-x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-3}^1 = \frac{32}{3}$. ■

Esercizio 1.9 Determinare l'area della regione di piano compresa tra la parabola $y^2 = 4x$, la retta $2x + y - 4 = 0$ e l'asse delle ascisse.

Risoluzione. Si noti che la parabola ha asse di simmetria parallelo all'asse delle x e vertice nell'origine. Inoltre, le due curve si intersecano in $(1, 2)$ e $(4, -4)$, e la retta $y = -2x + 4$ interseca l'asse x in $x = 2$. Vi sono pertanto due possibili regioni: $A_1 = \int_0^1 \sqrt{4x} dx + \int_1^2 (-2x + 4) dx = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$ e $A_2 = \int_0^2 [0 - (-\sqrt{4x})] dx + \int_2^4 [(-2x + 4) - (-\sqrt{4x})] dx = \frac{8}{3}\sqrt{2} + \frac{20 - 8\sqrt{2}}{3} = \frac{20}{3}$. ■

Esercizio 1.10 Determinare l'area della regione di piano delimitata nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Risoluzione. Ricavando $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, l'area in questione è data da

$$A = 4 \cdot \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} dx = (\text{dopo aver posto } x = a \sin t) = 4 \cdot \frac{b}{a} \int_0^{\pi/2} [\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t] dt = 4ab \int_0^{\pi/2} (\cos t)^2 dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2} = 4ab \frac{\pi}{4} = \pi ab. \quad \blacksquare$$

2 Integrali impropri

Richiami utili sugli integrali impropri.

- Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ è convergente per $\alpha > 1$ e positivamente divergente per $\alpha \leq 1$.
- Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora l'integrale improprio $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$ è convergente per $\alpha < 1$ e positivamente divergente per $\alpha \geq 1$.
- Criterio del confronto. Siano $f(x), g(x)$ due funzioni definite su $[a, +\infty[$ e integrabili in ogni intervallo limitato $[a, b]$ con $a < b$; se $g(x)$ è integrabile su $[a, +\infty[$ ed esiste $x_0 \geq a$ tale che $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq x_0$, allora anche $f(x)$ è integrabile su $[a, +\infty[$.

- Se l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ è assolutamente convergente, allora l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ è convergente.

L'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ si dice assolutamente convergente se l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ converge.

Esercizio 2.11 Dopo averne discusso la convergenza, calcolare $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$ utilizzando la definizione.

Risoluzione. Il problema si verifica in $x = 2$. Si osservi che $\frac{1}{\sqrt{2-x}} = \frac{1}{(2-x)^{1/2}}$, pertanto l'integrale improprio converge ($1/2 < 1$). Per calcolarne il valore si utilizza la definizione: $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx = \lim_{t \rightarrow 2^-} \left[\int_1^t \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx \right]$. Calcolando dapprima l'integrale indefinito $\int \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx = \int (2-x)^{-1/2} dx = -2\sqrt{2-x} + c$, si ha $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx = \lim_{t \rightarrow 2^-} \left[\int_1^t \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx \right] = \lim_{t \rightarrow 2^-} [-2\sqrt{2-x}]_1^t = \lim_{t \rightarrow 2^-} [-2\sqrt{2-t} + 2] = 2$. ■

Esercizio 2.12 Dopo averne discusso la convergenza, calcolare $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$ utilizzando la definizione.

Risoluzione. Il problema si verifica in $x = 2$. Si osservi che $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(2-x)(2+x)}} \sim \frac{1}{2(2-x)^{1/2}}$ per $x \rightarrow 2$, pertanto l'integrale improprio converge ($1/2 < 1$). Si ha quindi $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \lim_{t \rightarrow 2^-} \left[\int_0^t \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \right] = \lim_{t \rightarrow 2^-} \left[\arcsin \frac{x}{2} \right]_0^t = \lim_{t \rightarrow 2^-} \arcsin \frac{t}{2} = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$. ■

Esercizio 2.13 Siano $a \in \mathbb{R}, a > 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Discutere, al variare di α , la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\alpha} dx$$

Risoluzione. Se $\alpha \neq 1$ si ha $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\alpha} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\int_a^t \frac{1}{x(\log x)^\alpha} dx \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{(\log x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_a^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{(\log t)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{(\log a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]$. Pertanto l'integrale converge se $-\alpha + 1 < 0$ ovvero per $\alpha > 1$, mentre diverge se $-\alpha + 1 > 0$ ovvero per $\alpha < 1$.

Se $\alpha = 1$ si ha $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x \log x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} [\log(\log x) dx]_a^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} [\log(\log t) - \log(\log a)] = +\infty$.

In conclusione, l'integrale dato converge per $\alpha > 1$ e diverge positivamente per $\alpha \leq 1$.

■

Esercizio 2.14 Siano $a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Discutere, al variare di α , la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^a \frac{1}{x(\log x)^\alpha} dx$$

Risoluzione. Si proceda come nell'esercizio precedente. ■

Esercizio 2.15 Senza eseguire l'integrazione, si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{x} dx$$

Risoluzione. $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{x} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} \sim \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2x^{3/2}}$ per $x \rightarrow +\infty$, pertanto l'integrale converge. ■

Esercizio 2.16 Senza eseguire l'integrazione, si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

Risoluzione. $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ per $x \rightarrow 0$ e $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ per $x \rightarrow 1$, pertanto l'integrale converge. ■

Esercizio 2.17 Senza eseguire l'integrazione, si discuta la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx \quad (b) \int_1^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{x} \right)^2 dx$$

Risoluzione. (a) Essendo $\frac{1}{\sqrt{x}} \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) \sim \frac{1}{x^{3/2}}$ per $x \rightarrow +\infty$, l'integrale converge.

(b) Essendo $\left(\sin \frac{1}{x} \right)^2 \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \rightarrow +\infty$, l'integrale converge. ■

Esercizio 2.18 Senza eseguire l'integrazione, si discuta la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$(a) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\tan x}} dx \quad (b) \int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} dx$$

Risoluzione. (a) Essendo $\frac{1}{\sqrt{\tan x}} \sim \frac{1}{x^{1/2}}$ per $x \rightarrow 0$, l'integrale converge.

(b) Essendo $\frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} \sim \frac{1}{x^{1/2}}$ per $x \rightarrow 0$, l'integrale converge. ■

Esercizio 2.19 Determinare il più piccolo valore di $n \in \mathbb{N}$ affinché l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{x}{(\sqrt{x^2 + 1})^n} dx$ converga.

Risoluzione. Essendo $\frac{x}{(\sqrt{x^2 + 1})^n} \sim \frac{1}{x^{n-1}}$ per $x \rightarrow +\infty$, si ha convergenza per $n - 1 > 1$, ovvero per $n > 2$. Quindi il minor $n \in \mathbb{N}$ affinché l'integrale improprio converga è $n = 3$. ■

Esercizio 2.20 Discutere al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(2x + 3)^{b+1}} dx$$

Risoluzione. Per $x \rightarrow 0^+$ si ha $\frac{1}{x^a(2x + 3)^{b+1}} \sim \frac{1}{3^{b+1}x^a}$, quindi l'integrale converge per $a < 1$.

Per $x \rightarrow +\infty$ si ha $\frac{1}{x^a(2x + 3)^{b+1}} \sim \frac{1}{2^{b+1}x^{a+b+1}}$, pertanto l'integrale converge per $a + b + 1 > 1$, ovvero $b > -a$.

Globalmente l'integrale converge per $a < 1 \wedge b > -a$. ■

Esercizio 2.21 Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^a}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$$

Risoluzione. Si noti che $\frac{(\log x)^a}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{(\log x)^a}{\sqrt{(x - 1)(x + 1)}}$. Eseguendo la sostituzione

$t = x - 1 \Rightarrow x = 1 + t$, si ha $\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^a}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{(\log(1 + t))^a}{\sqrt{t(t + 2)}} dt$.

Per $t \rightarrow 0^+$ si ha $\frac{(\log(1+t))^a}{\sqrt{t(t+2)}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}t^{1/2-a}}$, quindi l'integrale converge per $1/2 - a < 1$, ovvero per $a > 3/2$.

Per $x \rightarrow +\infty$ si ha $\frac{(\log(1+t))^a}{\sqrt{t(t+2)}} \sim \frac{1}{t(\log t)^{-a}}$, pertanto l'integrale converge per $-a > 1 \Rightarrow a < -1$.

In conclusione, l'integrale dato *non converge*, essendo $a > 3/2 \wedge a < -1$ impossibile. ■

3 Funzione integrale

Esercizio 3.22 Utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale ed il teorema per le derivate di funzioni composte, calcolare le derivate delle seguenti funzioni integrali:

$$(a) F(x) = \int_0^x \sqrt{t} dt \quad (b) F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2} dt \quad (c) F(x) = \int_{2x}^{3x} (\cos t)^2 dt$$

Risoluzione.

$$(a) F'(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

$$(b) F'(x) = e^{(\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^x.$$

$$(c) F(x) = \int_{2x}^{3x} (\cos t)^2 dt = \int_{2x}^{x_0} (\cos t)^2 dt + \int_{x_0}^{3x} (\cos t)^2 dt = \int_{x_0}^{3x} (\cos t)^2 dt - \int_{x_0}^{2x} (\cos t)^2 dt. \text{ Pertanto } F'(x) = [\cos(3x)]^2 \cdot (3x)' - [\cos(2x)]^2 \cdot (2x)' = 3 \cos^2(3x) - 2 \cos^2(2x). \quad \blacksquare$$