GEOMETRIA

a.a. 2011/12 (Prof. M. Spera)

Prova scritta del 20 giugno 2012

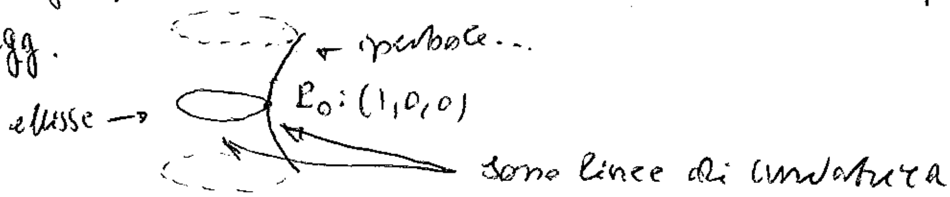
① Sia data la superficie $\mathcal{R}$:

$$\underline{r}(\varphi, t) = \left(\cos\varphi - t\sin\varphi,\ \tfrac{1}{2}\sin\varphi + \tfrac{1}{2}t\cos\varphi,\ t\right); \qquad \begin{array}{l}\varphi \in [0, 2\pi)\\ t \in \mathbb{R}\end{array}$$

dopo averne verificato la regolarità, si accerti che $\mathcal{R}$ è una rigata individuandone una direttrice e i regoli. Si determini poi il piano tangente lungo il regolo corrispondente a $\varphi = 0$.
$\mathcal{R}$ è sviluppabile? Cosa si può dire di K? (curv. gaussiana)
Si determini un'equazione cartesiana di $\mathcal{R}$.

② Si determinino le curvature principali, la curv. gaussiana e media di $\mathcal{R}$ in $P_0: (1, 0, 0)$ e si abbozzi il grafico della relativa indicatrice di Dupin.

Sugg.



Fac. Dimostrarlo per via geometrica

③ Dire se $X =$  e $Y =$ 

(nel piano, topologia relativa...) sono omeomorfi

Tempo a disposizione: 2h

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

(1) $\quad \mathcal{E} : \begin{cases} x^2+4y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$

Geometria
20 giugno
2012

$$\mathcal{E}: \begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \frac{1}{2}\sin\varphi \\ z=0 \end{cases} \qquad x^2+4y^2 = \cos^2\varphi + 4\cdot\frac{1}{4}\sin^2\varphi = 1$$

$$\underline{w}(\varphi) = (-\sin\varphi,\ \tfrac{1}{2}\cos\varphi,\ 1)$$

$$\mathcal{R}: \quad \underline{r}(\varphi, t) := (\underbrace{\cos\varphi - t\sin\varphi}_{x},\ \underbrace{\tfrac{1}{2}\sin\varphi + \tfrac{1}{2}t\cos\varphi}_{y},\ \underbrace{t}_{z})$$

regolarità: verifica diretta, in più modi

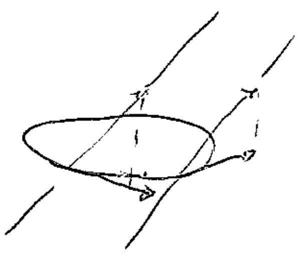
$$\mathcal{R}: \quad x^2+4y^2-z^2 = 1 \qquad \varphi \in [0,2\pi),\ t \in \mathbb{R}$$

iperboloide iperbolico (rigato, a una falda)

controllo:

$$x^2+4y^2-z^2 = \cos^2\varphi + t^2\sin^2\varphi - 2t\sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi + t^2\cos^2\varphi + 2t\sin\varphi\cos\varphi - t^2 =$$

$$= t^2+1-t^2 = 1 \quad \checkmark$$



Determiniamo il piano tangente lungo una generatrice particolare, ex $\varphi = 0$ sicché la generatrice ha eq:

$$\underline{r}(0,t) = (1,\ \tfrac{1}{2}t,\ t)$$

piano tangente:

$$\underline{r}_\varphi = (-\sin\varphi + t\cos\varphi,\ \tfrac{1}{2}\cos\varphi - \tfrac{1}{2}t\sin\varphi,\ 0)$$

$$\underline{r}_t = (-\sin\varphi,\ -\tfrac{1}{2}\cos\varphi,\ 1)$$

se $\varphi = 0$ ī:

$$\underline{r}_\varphi = (t,\ \tfrac{1}{2},\ 0)$$

$$\underline{r}_t = (0,\ -\tfrac{1}{2},\ 1)$$

piano tangente lungo la generatrice $\mathcal{G}$ scelta

$$\langle \underline{r} - r(0,t),\ \underline{r}_\varphi\big|_{\mathcal{G}} \times r_t\big|_{\mathcal{G}} \rangle = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-\frac{1}{2}t & z-t \\ t & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{1}{2}(x-1) - (y-\tfrac{1}{2}t)\cdot t + (z-t)(-\tfrac{1}{2}t) = 0$$

$$1(x-1) -2t(y-\tfrac{1}{2}t) -t(z-t) = 0$$

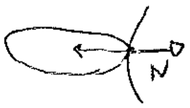
$\Rightarrow$ è variabile lungo $\mathcal{G}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{R}$ non è sviluppabile

e $K < 0$ (stesso rag. lungo un regolo generico $K \le 0$ per una rigata. nel nostro caso $K<0$) accertabile anche direttamente

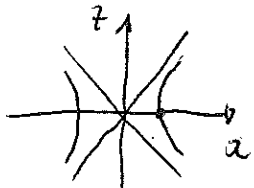
(2) Curvatura gaussiana, media e curv. principali in $P_0: (1,0,0)$.

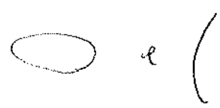
Troviamo le curvature principali curv. "meridiano", curv del "parallelo" (con il segno +) (con il segno −)

* per ragioni di simmetria e in base al teorema di Rodrigues le linee di curvatura passanti per P_0 sono



meridiano: $\begin{cases} x^2 - z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$





$$x^2 - z^2 - 1 = 0 \qquad\qquad x = x(z)$$

⚠ (Dini)

$$\cancel{2}xx' - \cancel{2}z = 0$$

$$xx' - z = 0 \qquad\qquad x'(0) = 0$$

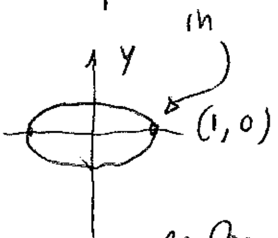
$$x'^2 + xx'' - 1 = 0$$

$$1 \cdot x''(0) - 1 = 0 \qquad\qquad x''(0) = 1$$

$$R = \frac{x''(0)}{(1 + x'(0)^2)^{3/2}} = 1$$ (ok il segno..)

curv. del "parallelo" : $\mathcal{E}: \; x^2 + 4y^2 = 1$ nel piano xy.

$$x^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$



anche qui $x = x(y)$ ⚠

$$2xx' + 8y = 0$$

$$xx' + 4y = 0 \qquad\qquad x'(0) = 0$$

$$x'^2 + xx'' + 4 = 0 \qquad\qquad 1 \cdot x''(0) + 4 = 0$$

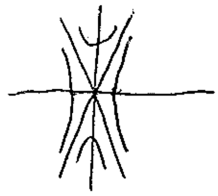
$$x''(0) = -4$$

curv. $$R = \frac{x''(0)}{(1 + x'(0)^2)^{3/2}} = -4$$ (ok il segno).

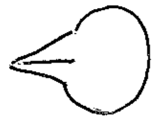
Dunque $K(P_0) = R_1 R_2 = 1 \cdot (-4) = -4$

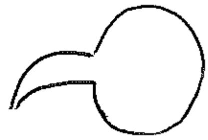
curv. media $= \frac{1}{2}(-4 + 1) = -\frac{3}{2}$

Dupin: $-4\xi^2 + \eta^2 = \pm 1 \qquad 4\xi^2 - \eta^2 = \mp 1$



Geometria
20 giugno 2022

(3) $X =$ 

$Y =$ 

$X \not\approx Y$ infatti se $\exists\, f : X \longrightarrow Y$ omeom.

$f\big|_{X-\{p\}} \quad X \setminus \{p\} \longrightarrow Y \setminus \{f(p)\}$ risulterebbe pure un

omeomorfismo, ma ciò è impossibile poiché

$Y \setminus \{f(p)\}$ è connesso, $X \setminus \{p\}$ no.