Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Matematica di Base — 24 gennaio 2006

matricola .... nome .... cognome ....

Corso di laurea: Matematica Applicata ☐

Scrivere subito nome, cognome e numero di matricola, indicando il corso di laurea. Le soluzioni vanno trascritte solo su questi fogli, negli spazi appositamente riservati. Si può anche usare il retro dei fogli, facendo chiari riferimenti.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Tot

Compito

1) Si consideri la seguente relazione sull'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi

$$R = \{\,(a,b) \mid a,b \in \mathbf{Z},\ a^2 + 2b^2 \text{ è multiplo di } 3\,\}.$$

Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza. È vero che $[3]_R = [6]_R$? È vero che $[1]_R = [3]_R$? Quante sono le classi di equivalenza individuate da R?

2) Mostrare che $R = \{(1,2),(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6)\}$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{1,2,3,4,5,6\}$. Determinare gli elementi massimali, minimali, eventuali massimo, minimo, maggioranti, minoranti, estremo superiore e estremo inferiore del sottoinsieme $\{2,3,4\}$.

3) Dimostrare per induzione che, per $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$$

4)

(1) Dare la definizione di funzione iniettiva.
(2) Dimostrare che se f è iniettiva allora $f^{-1} \circ f = Id_{Def(f)}$

5) Dire cosa significa che una formula è valida. Dire cosa significa che una formula è conseguenza logica di un insieme di formule. Dimostrare che per ogni scelta delle formule β e γ

$$\models \rightarrow \gamma \rightarrow \beta\gamma$$

6) In un linguaggio in cui c'è un simbolo di relazione binaria P e un simbolo di funzione unaria f, dire quali delle seguenti successioni di simboli sono formule (F), quali termini (T) e quali nulla (N); in quest'ultimo caso scrivere nell'ultima colonna una breve giustificazione.

	F	T	N	
Pfv_1fv_0				
$\rightarrow \wedge Pv_0fv_1\forall v_1Pv_1v_2$				
$\neg Pffv_1v_2$				
$\wedge\forall fv_1Pv_0v_1Pv_0fv_1$				
$Pfv_1Pv_0fv_1$				
$\neg\vee\forall v_0Pv_0fv_1Pv_0v_1$				
$fPvfv_3$				
$\wedge\wedge\forall v_0Pv_0fv_1\neg Pv_0v_1Pfv_1fv_2$				
$\wedge\rightarrow\neg\forall v_1Pv_0v_1Pfv_0fv_1\neg Pv_3fv_4$				

7) Si consideri la struttura $\mathfrak{N} = (\mathbf{N}, \{\equiv, \prec\}, \{\oplus, \otimes\}, \{\mathit{0}, \mathit{1}\})$, dove **N** denota l'insieme dei numeri naturali, $\equiv$ la relazione binaria di essere lo stesso numero, $\prec$, $\oplus$ e $\otimes$ rispettivamente l'ordine, l'addizione e la moltiplicazione tra numeri naturali, *0* e *1* i numeri zero e uno.

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio adatto alla struttura i cui simboli propri siano i predicati $=$, $<$; i simboli per funzione $+$, $\times$ e s; i simboli per costante 0 e 1.

Nel linguaggio $\mathcal{L}$ si scriva una formula $\varphi(v_0, v_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(v_0, v_1)[a, b]$ se e solo se $2b - a > 0$ e $a + b$ è multiplo di 3 e di 5.

8) Sia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ e^x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Dire se f è una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ e, in caso positivo, dire se è totale, iniettiva, suriettiva. Esiste l'inversa di f? In caso affermativo trovare f^{-1}.

9) Siano $f, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite da

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad g(x) = 1 - e^x$$

(1) Trovare l'insieme di definizione di f e l'insieme di definizione di g.
(2) Determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$, specificandone gli insiemi di definizione.