Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Matematica di Base — 7 ottobre 2008

matricola .... nome .... cognome ....

Corso di laurea: Matematica Applicata ☐ Informatica ☐ Informatica Multimediale ☐

Scrivere subito nome, cognome e numero di matricola, indicando il corso di laurea. Le soluzioni vanno trascritte solo su questi fogli, negli spazi appositamente riservati. Si può anche usare il retro dei fogli, facendo chiari riferimenti.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Tot

1) Si consideri la seguente relazione sull'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi

$$R = \{\,(a,b) \mid a,b \in \mathbf{Z},\ 5a-5b \text{ è un numero pari}\,\}.$$

Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza. Determinare la classe $[1153]_R$. Quante sono le classi d'equivalenza individuate da R?

Per dimostrare che R è una relazione d'equivalenza dobbiamo dimostrare che R è riflessiva, simmetrica e transitiva. Si noti che $(a,b) \in R$ se e solo se $a-b$ è un numero pari, cioé esiste un intero n tale che $a-b=2n$.

Riflessiva: Per ogni $a \in \mathbf{Z}$ $(a,a) \in R$, infatti $a-a=0=2\cdot 0$.

Simetrica: Se $(a,b) \in R$, allora $(b,a) \in R$. Per ipotesi esiste un $n \in \mathbf{Z}$ tale che $a-b=2n$: allora $b-a=-2n=2(-n)$. Abbiamo cosi' verificato la tesi.

Transitiva: Se $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R$, allora $(a,c) \in R$. Per ipotesi esiste un $n \in \mathbf{Z}$ tale che $a-b=2n$ e esiste un $m \in \mathbf{Z}$ tale che $b-c=2m$: allora $a-c=(a-b)+(b-c)=2n+2m=2(n+m)$. Abbiamo cosi' verificato la tesi.

Per trovare le classi d'equivalenza, osserviamo innanzitutto che se $a \in \mathbf{Z}$ è pari, allora $[a]_R$ coincide con l'insieme di tutti gli interi pari: infatti in tal caso $a-b$ è pari se e solo se anche b è pari. Analogamente se b è dispari, allora $[b]_R$ coincide con l'insieme degli interi dispari. Quindi le classi d'equivalenza sono solo due, e poiché 1035 è un numero dispari la sua classe d'equivalenza è l'inieme degli interi dispari.

2) Mostrare che $R = \{(7,6),(7,5),(7,4),(7,3),(7,2),(7,1),(6,5),(6,4),(6,3),(6,2),(6,1),(5,4),(5,3),(5,2),(5,1),(3,2),(3,1),(4,2),(4,1),(2,1),(8,1)\}$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Determinare gli elementi massimali, minimali, eventuali massimo, minimo, maggioranti, minoranti, estremo superiore e estremo inferiore del sottoinsieme $\{3,4,5\}$.

R è una relazione d'ordine stretto in quanto è antiriflessiva e transitiva: Infatti per ogni $x \in A$ $(x,x) \notin R$ e se $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$, allora $(x,z) \in R$. Maggioranti:$\{1,2\}$, Minoranti:$\{6,7,5\}$, Massimali::$\{3,4\}$, Minimali::$\{5\}$, Massimo: non esiste, Minimo: 5 Estremo superiore: 2 , Estremo inferiore: 5.

3) Dimostrare per induzione che, per $n \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)(i+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

- Passo Base: $n=0$. $\sum_{i=0}^{0} \frac{1}{(i+1)(i+2)} = \frac{1}{(0+1)(0+2)} = \frac{1}{2} = \frac{0+1}{0+2}$

- Passo Induttivo: per $n \geq 0$,supponiamo

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)(i+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

Dobbiamo verificare che

$$\sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{(i+1)(i+2)} = \frac{n+2}{n+3}$$

Infatti:

$$\sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{(i+1)(i+2)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)(i+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} \overset{(\text{ per Ipotesi Induttiva})}{=} \frac{n+1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} =$$

$$= \frac{(n+3)(n+1)+1}{(n+2)(n+3)} = \frac{n+2}{n+3}$$

4) Si risponda alle seguenti domande, motivando le risposte:

(1) L'insieme $\{e^{-x} | x \in R\}$ è numerabile? No, in quanto tale insieme ha stessa cardinalità di R: esiste infatti una biezione $f : \mathbf{R} \to \{e^{-x} | x \in R\}$ definita da $f(x) = e^{-x}$.

(2) Esibire un esempio di un insieme S tale che la cardinalità di $\mathbf{R}$ sia strettamente minore della cardinalità di S.Si consideri ad esempio $X = P(\mathbf{R})$, l'insieme delle parti di $\mathbf{R}$.

(3) L'insieme dei numeri primi maggiori di 1027 è numerabile? Si, infatti tale insieme è un sottoinsieme infinito di $\mathbf{N}$ (i numeri primi maggiori di 1037 sono infiniti!), quindi è numerabile.

7) Il seguente enunciato è vero nella struttura $\mathfrak{N}$ dei numeri naturali? E in quella $\mathfrak{Z}$ dei numeri interi? Giustificare adeguatamente la risposta.

$$\exists v_1 \forall v_0 \to \neg = v_0\, 0 < v_1\, v_0$$

In $\mathfrak{N}$ l'enunciato è vero: afferma infatti che esiste un numero naturale v_1 tale che, per ogni naturale v_0 diverso da zero, si ha $v_1 < v_0$. Ciò è vero con $v_1 = 0$.
In $\mathfrak{R}$ l'enunciato è falso. Infatti, preso un qualsiasi numero reale v_1, esiste sempre un altro reale v_0 diverso da zero con $v_0 < v_1$.

6) Dire che cosa significa che una formula φ è soddisfacibile. Dire cosa significa che la formula φ è conseguenza logica di una formula α. Dimostrare che, per ogni scelta delle formule α e γ,

$$\{\to \alpha\gamma\} \models \to \vee\gamma\alpha\gamma$$

Per le definizioni si studino le dispense.
Per il Teorema di deduzione semantica,

$$\{\to \alpha\gamma\} \models \to \vee\gamma\alpha\gamma$$

se e solo se

$$\{\to \alpha\gamma\} \cup \{\vee\gamma\alpha\} \models \gamma$$

Sia quindi σ una realizzazione tale che $\{\to \alpha\gamma\}^\sigma$ e $\{\vee\gamma\alpha\}^\sigma$ sono vere: dobbiamo concludere che γ^σ è vera. Osserviamo che, poiché $\{\vee\gamma\alpha\}^\sigma$ è vera, segue che o γ^σ è vera o α^σ è vera. Se γ^σ è vera concludo. Se α^σ è vera, allora poiché $\{\to \alpha\gamma\}^\sigma$ è vera, concludo ancora che anche γ^σ è vera.

5) Si consideri la struttura $\mathfrak{N} = (\mathbf{N}, \{\equiv, \prec\}, \{\oplus, \otimes\}, \{\mathit{0}, \mathit{1}\})$, dove $\mathbf{N}$ denota l'insieme dei numeri naturali, $\equiv$ la relazione binaria di essere lo stesso numero, $\prec$, $\oplus$ e $\otimes$ rispettivamente l'ordine, l'addizione e la moltiplicazione tra numeri naturali, $\mathit{0}$ e $\mathit{1}$ i numeri zero e uno. Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio adatto alla struttura $\mathfrak{N}$.

(1) Nel linguaggio $\mathcal{L}$ si scriva una formula $\varphi(v_0, v_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(v_0, v_1)[a, b]$ se e solo se b è multiplo di a^2 o a è multiplo di b^3.

(2) Si consideri la realizzazione $\sigma = (\mathfrak{N}, \underline{a})$, dove $\underline{a} : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $n \to 4n$. Si trovi φ^σ. (Motivare la risposta)

$$\vee \exists v_2 = v_0 \times v_2 \times \times v_1 v_1 v_1 \exists v_3 = v_1 \times v_3 \times v_0 v_0.$$

Inoltre φ^σ e' vera, perche' in questa realizzazione $v_0 = 0$ e $v_1 = 4$: pertanto v_0 è multiplo di v_1^3.

8) Sia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda - x^2 & x \leq 0 \\ \sqrt{x+9} & x \geq 0 \end{cases}$$

Dire per quali valori del paramentro f è una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Per tali valori, si dica se f è totale, iniettiva, suriettiva. Esiste l'inversa di f? In caso affermativo, trovare f^{-1}.

Affinchè f sia una funzione, deve essere univoca; dobbiamo quindi controllare che $f(0)$ sia ben definito. Quidni $\sqrt{0+9} = 0^2 + \lambda$, da cui segue $\lambda = 3$.
La funzione diventa quindi:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + \lambda & x < 0 \\ \sqrt{x+9} & x \geq 0 \end{cases}$$

La funzione f è totale, in quanto il suo insieme definizione coincide con $\mathbf{R}$ (cioè f è definita per ogni $x \in \mathbf{R}$).
Verifichiamo che f è iniettiva, cioè che se $f(x_1) = f(x_2)$, allora $x_1 = x_2$. Se $x_1 < 0$ e $x_2 < 0$, allora $f(x_1) = -x_1^2 + 3$, $f(x_2) = -x_2^2 + 3$. Poiché x_1 e x_2 sono entrambi negativi, da $-x_1^2 + 3 = -x_2^2 + 3$, si conclude $x_1 = x_2$. Se $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, allora $f(x_1) = \sqrt{x_1 + 9}$, $f(x_2) = \sqrt{x_2 + 9}$. Quidni da $\sqrt{x_1 + 9} = \sqrt{x_2 + 9}$ si conclude $x_1 = x_2$. Se $x_2 < 0$ e $x_1 \geq 0$, allora $f(x_1) = \sqrt{x_1 + 9}$ e $f(x_2) = x_2^2 + 3$. Osserviamo che $f(x_1)$ è maggiore o uguale a 3, mentre $f(x_2)$ è strettamente minore di 3. Quindi l'uguaglianza $f(x_1) = f(x_2)$ in questo caso non è mai verificata.
Verifichiamo che f è suriettiva. Sia $y \in R$: se $y \geq 3$, allora $y = \sqrt{x+9}$, dove $x = y^2 - 9$; se $y < 3$, allora $y = -x^2 + 3$, dove $x = -\sqrt{y+3}$. Quidni l'immagine di f coincide con $\mathbf{R}$.
L'inversa di f esiste poiché f è iniettiva.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{x+3} & x < 3 \\ x^2 - 9 & x \geq 3 \end{cases}$$

9) Siano $f, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite da

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} \qquad g(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$$

(1) Trovare l'insieme di definizione di f e l'insieme di definizione di g.
(2) Determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$, specificandone gli insiemi di definizione.

$\mathrm{Def}\, g = \{x \in \mathbf{R} | x \leq 0 \text{ oppure } x \geq 2\}$; $\mathrm{Def}\, f = \{x \in \mathbf{R} | x \neq 0\}$
$g \circ f = \sqrt{e^{\frac{2}{x^2}} - 2e^{\frac{1}{x^2}}}$, $f \circ g = e^{\frac{1}{x^2 - 2x}}$
$\mathrm{Def}\, g \circ f = \{x \in \mathbf{R} | -\ln 2 < x < \ln 2 \text{ e } x \neq 0\}$; $\mathrm{Def}\, f \circ g = \{x \in \mathbf{R} | x < 0 \text{ oppure } x > 2\}$