

GEOMETRIA

a.a. 2011/12 (Prof. M. Spina)

Prova scritta del 3 Settembre 2012

- ① Si consideri la curva $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, con
 $\Sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $\Sigma_2: x^2 + 2y^2 = 1$.

Dopo averci accertati che si tratta di una curva
regolare in un opportuno intorno di $P: (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,
se ne calcoli ivi la curvatura. (si usi $\alpha = \alpha(s)$...
e il calcolo implicito)
Facc. Determinare anche la torsione

- ② Con riferimento all'es. ①, si calcoli la
curvatura geodetica di C in P relativamente
alla superficie Σ_1 , e relativamente alla superficie Σ_2

- ③ X = mazzo di carte da poker

Sia $\mathcal{C} := \{ \phi, X, \text{ sottoinsiemi formati con i semi } \underline{\text{rossi}} \}$

È una topologia? È di Hausdorff?

Sia $\sim \equiv$ avere lo stesso seme. La topologia
quoziente $\mathcal{C}_{\sim}$ su $X/\sim$ è di Hausdorff?

①

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{sfera} \\ \text{cilindro} \\ \text{ellittico} \end{matrix}$$

geometria
3 settembre
2012

$$\nabla f = (2x, 2y, 2z) \quad \nabla f \times \nabla g$$

$$\nabla g = (2x, 4y, 0)$$

$$\nabla f \times \nabla g = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 2x & 4y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i} (-8yz) - \underline{j} (-4xz) + \underline{k} (8xy - 4xy)$$

$$= (-8yz) \underline{i} + (4xz) \underline{j} + 4xy \underline{k}$$

$$\nabla f \times \nabla g = 0 \quad \text{per} \quad yz = xz = xy = 0$$

$$xy = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow x = 0 \\ \searrow y = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} (x, y, z) \\ = (0, 0, 0) \end{matrix}$$

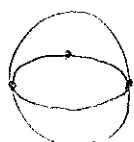
$$\text{se } x = 0, y \neq 0 \Rightarrow z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

4 sol. ma non
appartengono a C.

$$\Rightarrow yz \neq 0$$

$$\text{e cos'è, se } y = 0, x \neq 0, \text{ e } x = \pm 1 \Rightarrow z = 0$$

$$\Rightarrow P_{\pm}: (\pm 1, 0, 0) \text{ e singolare}$$



$$P: (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ è regolare (ovvero, non} \\ \text{singolare)}$$

e per la teoria del DMC localmente la curva è
regolare.

$$\underline{r} = (x, y, z)$$

$$\underline{r}' = (x', y', z')$$

$$\|\underline{r}'\| = 1 \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

$$\underline{r}'' = (x'', y'', z'')$$

$$\underline{r}''' = (x''', y''', z''')$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = 1}$$

$$2xx' + 2yy' + 2zz' = 0 \quad \boxed{xx' + yy' + zz' = 0}$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + xx'' + yy'' + zz'' = 0$$

$$2x'x'' + 2y'y'' + 2z'z'' + x'x''' + y'y''' + z'z''' = 0$$

$$(\diamond) \quad \boxed{3x'x'' + 3y'y'' + 3z'z'' + x'x''' + y'y''' + z'z''' = 0}$$

scelt.

$$\underline{r} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} y' + \frac{1}{\sqrt{2}} z' = 0$$

$$y' = -z'$$

$$2 \frac{1}{\sqrt{2}} y' = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{y' = z' = 0}$$

(ce lo avevamo)

$$x' = \pm 1$$

$$\boxed{\text{scelgo } x' = +1}$$

$$\boxed{\underline{r}' = (1, 0, 0)}$$

si ha poi

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y'' + \frac{1}{\sqrt{2}} z'' = 0$$

$$1 + 2 \frac{1}{\sqrt{2}} y'' = 0$$

$$\boxed{y'' = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} z'' = 0$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} z'' = 0$$

$$\boxed{z'' = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

u. pag. 11
successiva

$$2x'x'' + 2y'y'' + 2z'z'' = 0$$

$$x''^2 + y''^2 + z''^2$$

$$+ x'x''' + y'y''' + z'z''' = 0$$

(*)

$$\boxed{x^2 + 2y^2 = 1}$$

$$2xx' + 4yy' = 0$$

$$\boxed{xx' + 2yy' = 0}$$

$$x'^2 + 2y'^2$$

$$+ xx'' + 2yy'' = 0$$

$$2x'x'' + 4y'y''$$

$$+ x'x''' + 2y'y'''$$

$$+ xx''' + 2yy''' = 0$$

$$3x'x'' + 6y'y''$$

$$+ x'x''' + 2y'y''' = 0$$

(**) /

$$1 \cdot \alpha'' = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha'' = 0}$$

$$\Rightarrow \underline{r}'' = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad R = \|\underline{r}''\|$$

$$\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

torsione (fac.) $\boxed{\underline{r}'' = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)}$

◇ pag. prec. $\frac{1}{\sqrt{2}} y''' + \frac{1}{\sqrt{2}} z''' = 0 \quad z''' = -y'''$

★ della pag. prec. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \alpha''' = 0 \quad \boxed{\alpha''' = -1}$

$$3\alpha'' + 6\frac{1}{\sqrt{2}} y'' + 2\frac{1}{\sqrt{2}} y''' = 0$$

→ (★★) pag. prec.

$$\frac{6}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \sqrt{2} y''' = 0$$

$$-3 + \sqrt{2} y''' = 0$$

$$\boxed{y''' = \frac{3}{\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{z''' = -\frac{3}{\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{\underline{r}''' = \left(-1, \frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}} \right)}$$

$$\tau = - \frac{\langle \underline{r}' \times \underline{r}'', \underline{r}''' \rangle}{R^2} = -$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

L

$$= -1 \cdot \left(\underbrace{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}}_3 \right) = -3$$

$$1 \cdot x'' = 0 \Rightarrow \boxed{x'' = 0}$$

$$\Rightarrow \underline{r}'' = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \kappa = \|\underline{r}''\| = 1$$

torsione (facolt.)

$$\text{da } (*) : \underbrace{x''^2 + y''^2 + z''^2}_{\|\underline{r}''\|^2 = 1} + \underbrace{x' x'''}_{\substack{\parallel \\ 1}} + \underbrace{y' y'''}_{\substack{\parallel \\ 0}} + \underbrace{z' z'''}_{\substack{\parallel \\ 0}} = 0$$

$$1 + x''' = 0 \Rightarrow x''' = -1$$

$$\text{da } (**): \underbrace{3x' x''}_{\substack{\parallel \parallel \\ 1 \quad 0 \\ 0}} + 6y' y'' + x x''' + 2y' y''' = 0$$

$$\substack{\parallel \parallel \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0} \quad \substack{\parallel \\ \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$-\frac{6}{2} + \sqrt{2} y''' = 0$$

$$-3 + \sqrt{2} y''' = 0$$

$$\boxed{y''' = \frac{3}{\sqrt{2}}}$$

$$\text{da } (>): 3x' x'' + 3y' y'' + 3z' z'' + x x''' + y y''' + z z''' = 0$$

$$\substack{\parallel \parallel \\ 1 \quad 0 \\ 0} \quad \substack{\parallel \parallel \\ 0 \quad 0 \\ 0} \quad \substack{\parallel \parallel \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0}$$

$$\frac{y'''}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} z''' = 0 \Rightarrow \boxed{z''' = -\frac{3}{\sqrt{2}}}$$

★ New variable
on Controllo

3-his

(2)

Abbiamo bisogno di $\underline{b}$ e $\underline{N}$

ora
(in $\mathbb{R}$)

$$\underline{r}' = \underline{t} = (1, 0, 0)$$

$$\underline{r}'' = R \underline{n} = \underline{n} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\underline{b} = \underline{t} \times \underline{n} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -\underline{j} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \underline{k} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{j} - \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{k} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \boxed{\underline{b} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$\underline{N}$:

$$\begin{array}{l} \nearrow \tau_1 \\ \searrow \tau_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}$$

$$\nabla f = (2x, 2y, 2z)$$

$$(2 \cdot 0, 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}) = (0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$\boxed{\underline{N}_{\tau_1} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

(chiamo a priori)

$$\nabla f = (2x, 2y, 0)$$

$$\left(0, \frac{2}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\boxed{\underline{N}_{\tau_2} = (0, 1, 0)}$$

prima chiamo a priori)

Le due curvatures geodetiche valgono pertanto, in $\underline{P}$

$$K_g^{(1)} = -R_{\underline{L}} \langle \underline{b}, \underline{N}^{(1)} \rangle = 0 \quad \text{su } \tau_1$$

$$K_g^{(2)} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{su } \tau_2$$

③ $\mathbb{C}$ soddisfa gli assiomi
1, 2, 3 per una topologia.

geometria
3 settembre
2022

Non è di Hausdorff: due curve nere
non possono essere separate da intorni disgiunti.

La topologia quoziente non è di Hausdorff.

$$X/\sim = \{ \text{"cuori"}, \text{"quadrati"}, \text{"fiori"}, \text{"picche"} \}$$

un intorno U di "fiori" deve essere tale che $\pi^{-1}(U)$
^{aperto} deve essere aperto in X , per cui

$$\pi^{-1}(U) = X \quad \text{e} \quad U = X/\sim$$

Allo stesso modo, un intorno V di "picche" ...

è necessariamente $X/\sim$. "fiori" e "picche"

non possono essere separati.