ALGEBRA LINEARE CON ELEMENTI DI GEOMETRIA (Proff. L. Angeleri e M. Spera)

modulo: ELEMENTI DI GEOMETRIA Prof. M. Spera

a.a. 2009/10

Prova scritta del 22/2/2010

1. Nel piano affine euclideo reale $\mathbb{E}^2$, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, determinare l'affinità che manda $A:(0,0) \longmapsto A':(0,0)$; $B:(2,0) \longmapsto B':(2,0)$, $C:(1,1) \longmapsto C'(2,1)$. Dire se si tratta di un'isometria. 2. Scritta l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per A, B, C, si determini $\mathcal{C}' = T\cdot\mathcal{C}$ (immagine di $\mathcal{C}$ tramite T). Di che tipo di curva si tratta? 3. Dire se il centro di $\mathcal{C}$ è inviato nel centro di $\mathcal{C}'$. Cosa si può dire delle rette $A'B'$, $C'D'$ ($D:(1,0)$)?
   4. Determinare le coordinate baricentriche di $E:(1,2)$ rispetto ad A, B, C. (fac: in due modi diversi) e quelle di E' rispetto ad $A'B'C'$.

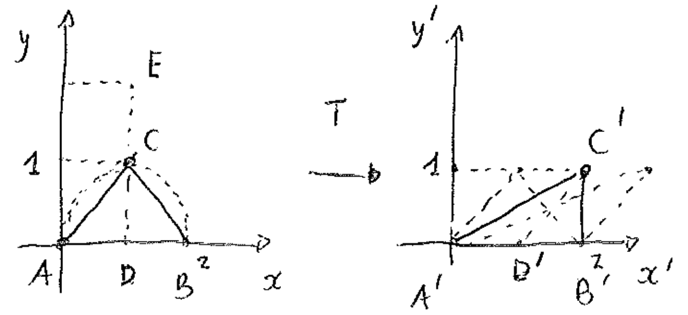
2. Nel piano euclideo reale $\mathbb{E}^2$, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, e ampliato proiettivamente, determinare la conica $\mathcal{C}$ tangente a $r: y = x+1$ in $R:[0,1,1]$ e all'asse y in $O:[1,0,0]$, e con centro $C_\mathcal{C}:[1,-1,0]$. 2 Determinare gli eventuali asintoti, gli assi e la forma canonica metrica. 3. Determinare i fuochi reali di $\mathcal{C}$ e le rispettive direttrici. Abbozzare il grafico di $\mathcal{C}$

Tempo a disposizione: 1h 15m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Elementi di geometria 22/2/2010

(1)



$$T: \quad A:(0,0) \longmapsto A':(0,0)$$
$$B:(2,0) \longmapsto B':(2,0)$$
$$C:(1,1) \longmapsto C':(2,1)$$

$T \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ È chiaro che $b_1 = b_2 = 0$ (ad es. $A = A'$)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 2 = 2a_{11} & a_{11} = 1 \\ 0 = 2a_{21} & a_{21} = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 = 1 + a_{12} & \Rightarrow a_{12} = 1 \\ 1 = a_{22} & a_{22} = 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T è un'affinità ma non un'isometria ("shear")

(controllo $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} A' & B' & C' \end{matrix} \end{array}$ ✓)

$\mathscr{C}: \quad (x-1)^2 + y^2 = 1 \qquad \begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' - y' \\ y = y' \end{cases}$

$\mathscr{C}': \quad (x' - y' - 1)^2 + y'^2 = 1$: ellisse

D, centro di $\mathscr{C}$ $\rightarrow$ D', centro di $\mathscr{C}'$ (centro: concetto affine)

A'B' e C'D' sono diametri coniugati

Coordinate baricentriche di E rispetto ad ABC $\quad E: \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

$$A: \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad B: \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \quad C: \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$u = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}} = \frac{2+2-4-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 2$$

(controllo det. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}$

$= (-1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}$

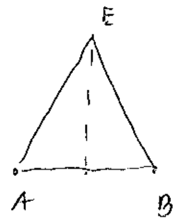
$= -(2-1)$

$= -1$ ✓)

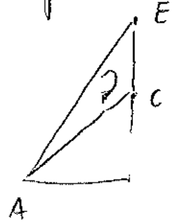
$$v = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}}{2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$w = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

controllo geometrico $\quad$ area $ABC = 1$



area $ABE = +2$ ✓



area (or) $AEC = -\frac{1}{2}$ ✓

area $BCE = -\frac{1}{2}$ ✓

Coord. baricentriche di E' rispetto ad $A'B'C'$: le stesse (invarianti per affinità)

Elementi di Geometria
22/2/2010

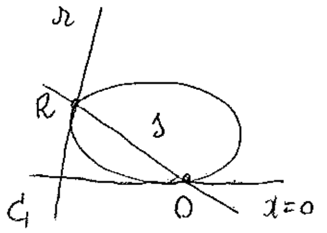
(2)

Conica $\mathcal{C}$ tangente in $R=[0,1,1]$

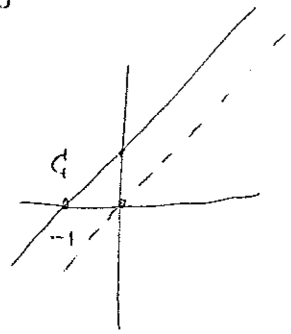
a $r: \ y = x+1$ e in $O:[1,0,0]$

all'asse y, e con centro in $C_1:[1,-1,0]$

r è un asintoto ($\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ è un'iperbole)



$s = OR: \quad y = x$



scriviamo il fascio di coniche bitangenti (in forma non omogenea)

$$x\,(y-x-1) + \lambda\,(y-x)^2 = 0$$

$$xy - x^2 - x + \lambda\,(x^2 - 2xy + y^2) = 0$$

$$(\lambda-1)x^2 + \lambda y^2 + (1-2\lambda)\,xy - x = 0$$

$$(\lambda-1)\,x_1^2 + \lambda x_2^2 + (1-2\lambda)x_1x_2 - x_1x_0 = 0$$

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda-1 & \frac{1-2\lambda}{2} \\ 0 & \frac{1-2\lambda}{2} & \lambda \end{pmatrix}$$

imponiamo allora che $p_{C_1} = r_\infty$:

polare di C_1:

$$(x_0 \; x_1 \; x_2)\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda-1 & \frac{1-2\lambda}{2} \\ 0 & \frac{1-2\lambda}{2} & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0 \; x_1 \; x_2)\begin{pmatrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}+1-\lambda \\ \frac{2\lambda-1}{2} \end{pmatrix} = 0$$

$$+\frac{1}{2}x_0 + \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)x_1 + \frac{2\lambda-1}{2}x_2 = 0$$

l'eq. deve essere equiv. a $x_0 = 0$. ciò fornisce $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-2x - x^2 + y^2 = 0$$

$$\boxed{\mathscr{C}: \quad x^2 - y^2 + 2x = 0}$$ (iperbole equilatera)

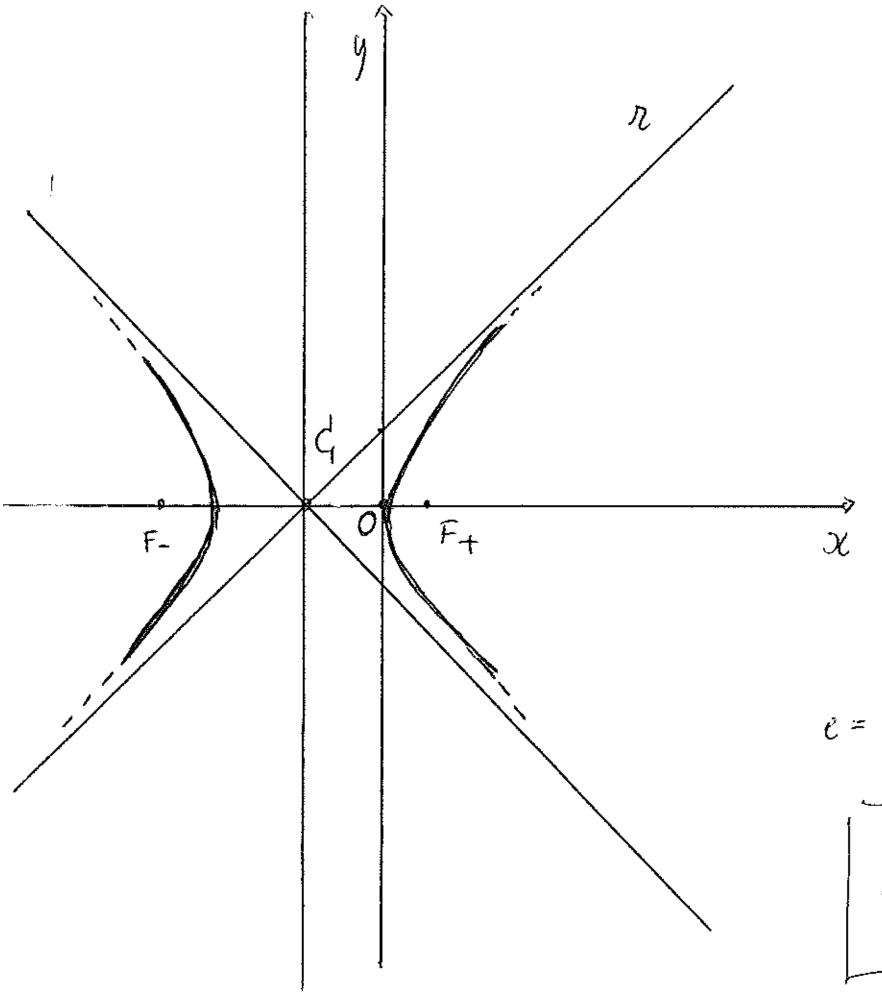
dir. asintoti $m = \pm 1$

assi: $x=0$ $y=-1$

$$(\underbrace{x+1}_{X})^2 - \underbrace{y}_{Y}^2 = 1$$

f. can. metrica.

$$(x^2+2x+1) - y^2 = 1$$



$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$$

$$\boxed{\delta_\pm : x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} - 1}$$

direttrici

fuochi: $c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 1 = 2 \qquad c = \sqrt{2}$

$$F_\pm = \left(\begin{matrix} \sqrt{2} - 1 \\ -\sqrt{2} - 1 \end{matrix} , 0 \right) = (\pm\sqrt{2} - 1, 0)$$

Direttrici $\quad (x_0 \ x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$$(x_0 \ x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} - 1 \\ \pm\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (\pm\sqrt{2} - 1)x_0 \pm \sqrt{2} x_1 = 0$$

$$\pm\sqrt{2} x = 1 \mp \sqrt{2}$$

$$x = \frac{1 \mp \sqrt{2}}{\pm\sqrt{2}} = \frac{(1 \mp \sqrt{2})(\pm\sqrt{2})}{(\pm\sqrt{2})(\pm\sqrt{2})}$$

$$x_\pm = \begin{cases} \dfrac{(1 - \sqrt{2})\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2} - 2}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 1 \\ \dfrac{-(1 + \sqrt{2})\sqrt{2}}{2} = \dfrac{-\sqrt{2} - 2}{2} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} - 1 \end{cases} \qquad \left(\frac{x_+ + x_-}{2} = -1 \ \checkmark \right)$$