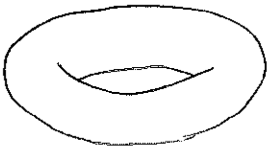
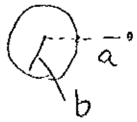
Geometria - Prova scritta del 21/12/2009

(Prof. M. Spera)

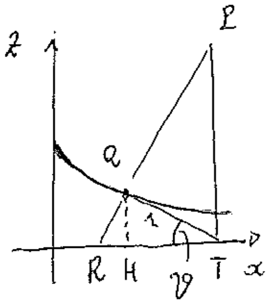
① Sia dato il toro Σ : $\begin{cases} x = (a+b\cos v)\cos u \\ y = (a+b\cos v)\sin u \\ z = b\cdot \sin v \end{cases}$ $\quad a > b > 0$, $\quad u, v \in [0, 2\pi]$



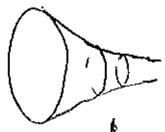


Si dimostri che esistono punti su Σ in cui la curvatura gaussiana K è positiva e punti in cui questa è negativa.

Si determinino i punti di Σ in cui $K = 0$.

② 

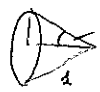
Sia data la trattrice γ $\begin{cases} x = t - \tanh t \\ z = \dfrac{1}{\cosh t} \end{cases}$ $\quad t > 0$



e la pseudosfera Σ da questa generata.

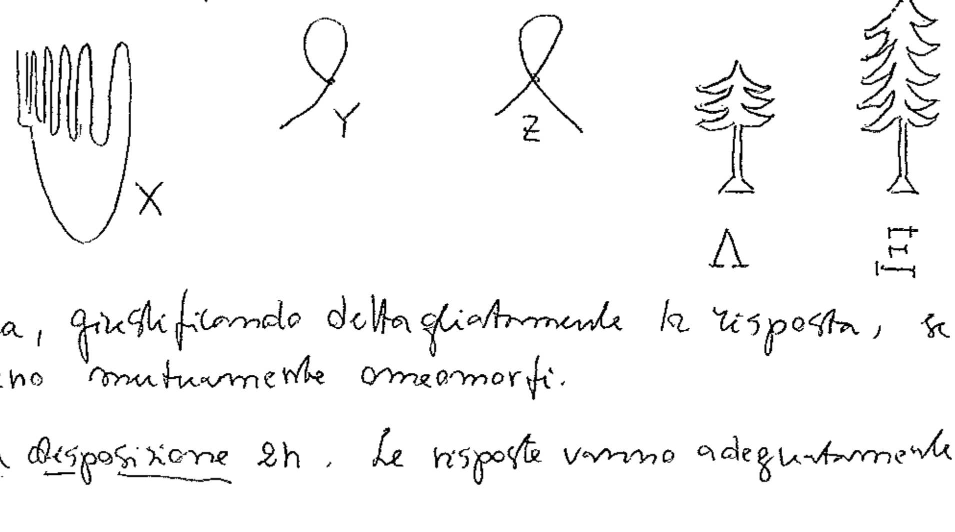
Calcolare la curvatura geodetica di un generico parallelo di Σ.
Trattasi di geodetiche?
Determinare l'angolo α di cui ruota il versore tangente

al parallelo per Q tramite trasporto parallelo dello stesso lungo la curva (sugg. "visivo"



α)

③ Si considerino i seguenti spazi topologici (top. relativa indotta da quella standard del piano)



Si dica, giustificando dettagliatamente la risposta, se essi sono o meno mutuamente omeomorfi.

Tempo a disposizione 2h. Le risposte vanno adeguatamente giustificate

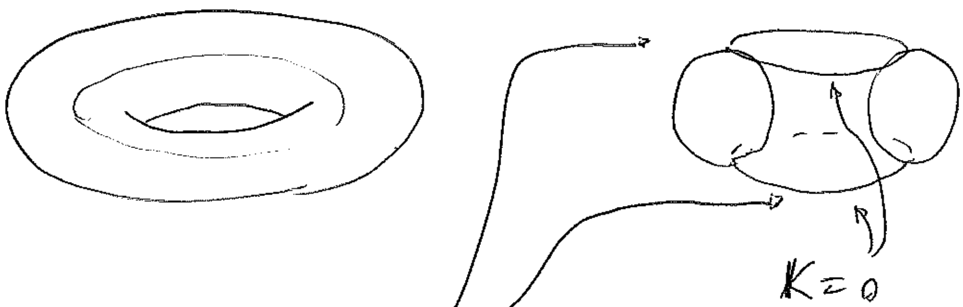
(1)

Se la curvatura del toro non cambiasse di segno, (e sia, ad es. $K \geq 0$), si avrebbe, da un lato

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} K \, d\sigma = \underset{\substack{\text{toro}:\ g=1}}{\underset{2-2\cdot 1}{\overset{}{0}}}$$

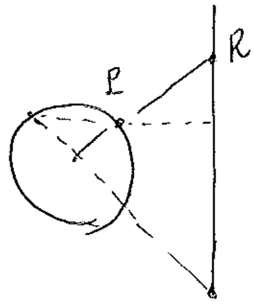
dall'altro $\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} K \, d\sigma \geq 0$.

Per continuità, se $K(P) > 0$ in $P \in \Sigma$, tale disuguaglianza persisterebbe in un intorno di P, sicché $\iint_{\Sigma} K \, d\sigma > 0$, assurdo.



$K = 0$ precisamente su

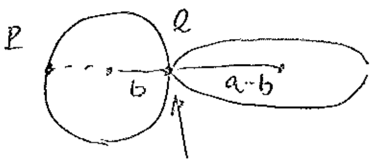
Ricordiamo infatti che i meridiani e i paralleli sono linee di curvatura. I primi hanno curvatura $\frac{1}{b} = k_1$

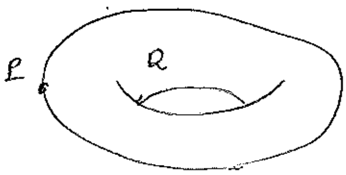


In virtù del teorema della grannormale, l'altra curvatura principale, k_2, vale, in valore assoluto $|k_2| = \frac{1}{PR}$ (v. figura)

Pertanto $K = 0 \iff k_2 = 0$, il che avviene (passando al limite), nei poli indicati.

Esibiamo ora pti in cui $K \gtrless 0$, calcolando la curvatura esplicitamente

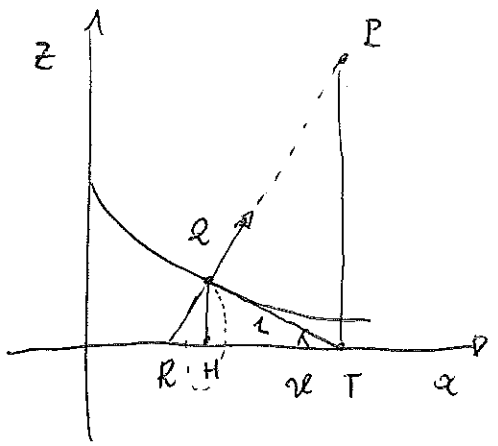


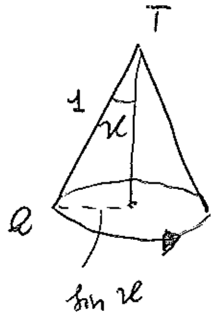


In P la curvatura gaussiana vale $K = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a+b}$

In Q vale $K = - \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a-b}$

(2)





$$P: \begin{cases} x = t \\ z = \cosh t \end{cases} \qquad Q: \begin{cases} x = t - \tanh t \\ z = \dfrac{1}{\cosh t} \end{cases} \qquad T: (t, 0)$$

catenaria — trattrice

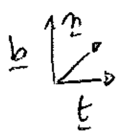
$$\sin\theta = \frac{1}{\cosh t}$$

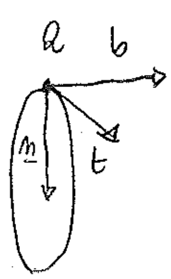
angolo di trasporto parallelo (dalla teoria, v. dispensa IX)

$$\xi = 2\pi\,(1 - \sin\theta)$$

$$\xi = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\cosh t}\right) = 2\pi\left(\frac{\cosh t - 1}{\cosh t}\right)$$

<u>Curvatura geodetica</u>: calcoliamo $\langle \underline{b}, \underline{N} \rangle$ in Q





$\underline{b} : (1, 0, 0)$

$\underline{N} = ?$

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

retta PQ : coeff. angolare: $m =$

$$\frac{z_P - z_Q}{x_P - x_Q} = \frac{\cosh t - \frac{1}{\cosh t}}{t - (t - \tanh t)} = \frac{\frac{\cosh^2 t - 1}{\cosh t}}{\tanh t}$$

$$= \frac{\sinh^2 t}{\cosh t} \cdot \frac{1}{\tanh t} = \sinh t$$

$$\underline{N} = \frac{1}{\sqrt{\cdot}} (1, 0, \sinh t)$$

$$\cdot = 1 + \sinh^2 t = \operatorname{ch}^2 t$$

$$\sqrt{\ } = \operatorname{ch} t$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{N} = \left(\frac{1}{\cosh t}, 0, \tanh t \right)$$

controllo

$$\operatorname{th}^2 + \frac{1}{\operatorname{ch}^2} =$$

$$\frac{\operatorname{th}^2 \operatorname{ch}^2 + 1}{\operatorname{ch}^2} =$$

$$\frac{\operatorname{sh}^2 + 1}{\operatorname{ch}^2} = 1$$

Altro modo (controllo...)

velocità di γ in Q : $(\dot{x}, \dot{y})$

$$\dot{x} = \frac{d}{dt} (t - \tanh t) = 1 - \frac{d}{dt} \left(\frac{\operatorname{Sh} t}{\operatorname{Ch} t} \right) =$$

$$= 1 - \frac{\operatorname{Ch}^2 t - \operatorname{Sh}^2 t}{\operatorname{Ch}^2 t} = 1 - \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 t} = \frac{\operatorname{Sh}^2 t}{\operatorname{Ch}^2 t} = \tanh^2 t$$

$$\dot{y} = - \frac{\sinh t}{\cosh^2 t} = - \frac{\tanh t}{\cosh t}$$

normale $\propto$ $(-\dot{y}, \dot{x}) = \left(\frac{\tanh t}{\cosh t}, \tanh^2 t \right) \propto \left(\frac{1}{\cosh t}, \tanh t \right)$ ✓

dunque $\underline{N}(Q) = \left(\frac{1}{\cosh t}, 0, \tanh t \right)$

$$\langle \underline{b}, \underline{N} \rangle (\varrho) = \frac{1}{\cosh t}$$

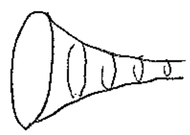
$$k_g(\varrho) = \frac{1}{\cosh t} \cdot k(\varrho) = \frac{1}{\cosh t} \cdot \left(-\frac{1}{y_\varrho}\right)$$

(costante)

$$k(\varrho) = -\frac{1}{\varrho H}$$

$$= \frac{1}{\cosh t} \cdot (-\cosh t) = -1$$

$\Rightarrow$ $k_g \equiv -1$ su qualsiasi parallelo!

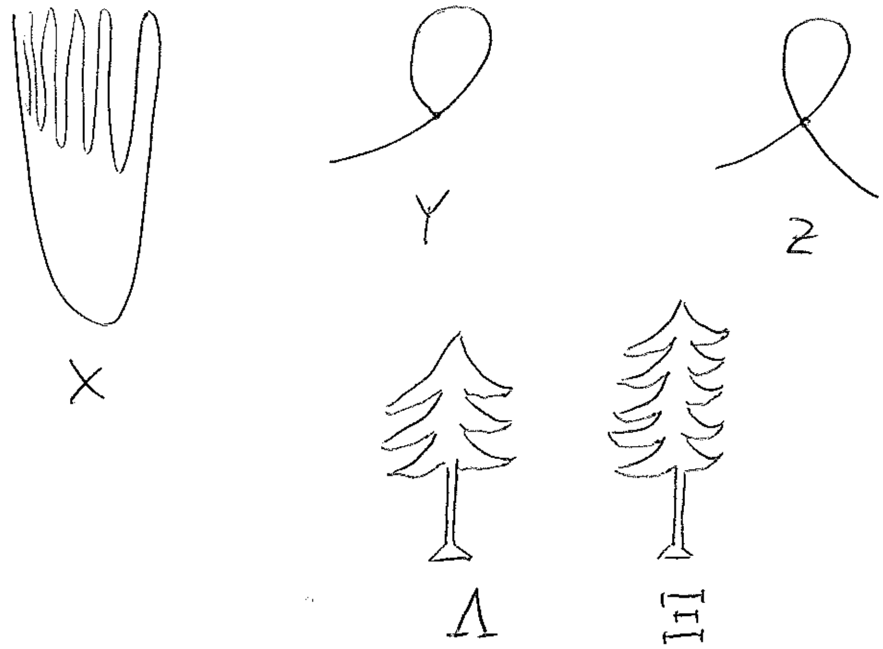


(i paralleli non sono geodetiche, ma ciò era chiaro).

calcoliamo $\int k_g \cdot ds = -\int ds = -2\pi \frac{1}{\cosh t}$

(a meno del fattore 2π, che ci si aspetta, coincide con l'altra sol...)

③



X non loc. connessa per archi, gli altri lo sono

$\Lambda \approx \Xi \approx \bigcirc$

$Y \not\approx Z$ poichè  $\not\approx$ 

(Se questi ultimi lo fossero, si arriva facilmente a vedere che  $\approx$ , il che è falso ...)

E' anche $Y \not\approx \Lambda$, $Z \not\approx \Lambda$

(se  $\approx \bigcirc \Rightarrow$  $\approx \bigcirc$ assurdo..)

sconnesso connesso

In definitiva, tutti gli sp. sono mutuamente non omeomorfi, eccetto Λ e Ξ