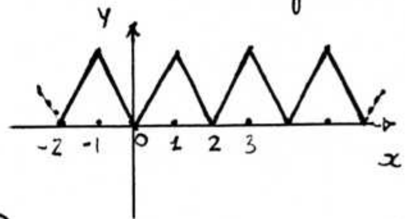
ANALISI MATEMATICA I - Bioinformatica a.a. 2007/08

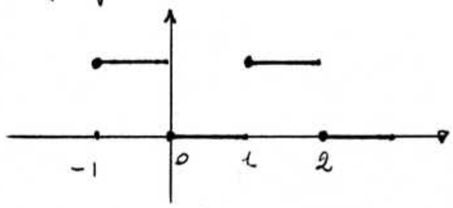
Proff. M. Spera, M. Squassina - Prova scritta del 18/3/2008

Prologo

(1) Tutti i numeri reali $\neq 0$ sono positivi: infatti, da $1 > 0$ segue, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x = x \cdot 1 > x \cdot 0 = 0$, ossia $x > 0$ ...
Dov'è l'errore?

(2) Determinare gli eventuali punti di discontinuità delle seguenti funzioni (definite su $\mathbb{R}$)





(3) Quali $x \in \mathbb{R}$ soddisfano l'equazione $\sin x + 2 = 0$?

(4) Determinare il dominio di $f(x) = \log(\log x)$

(5) Calcolare la derivata della f del punto precedente

(6) Calcolare la derivata di $F(x) = \int_0^x \sin(t^3)\,dt$

◆ ◆ ◆

E (1)

1.1 Calcolare $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x - 1 + \cos x}{x \cdot \arctan x}$

1.2 Dire se convergono le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} - 1 + \cos \frac{1}{n} \right] \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \arctan \frac{1}{n}$$

1.3 Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \arctan(\frac{1}{x})}\,dx$

→

E ② Si consideri la funzione

$$y = x + \frac{\log x}{x} \equiv f(x)$$

2.1 Determinarne il dominio e gli eventuali asintoti.

2.2 Calcolare f', studiare la crescenza e decrescenza di f e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo relativi e assoluti di f, nonché il segno.

2.3 Calcolare f'' e studiare la convessità di f

<u>Abbozzo del grafico</u>

E ③ 3.1 Calcolare, possibilmente in due modi,

$$\int_1^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx$$

3.2 Determinare il volume del solido di rivoluzione generato dalla rotazione del grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x^2+1}}$, $x \in [1,2]$

attorno all'asse x.

★ 3.3 Calcolare $\int x^2\sqrt{1+x^2}\,dx$

E ④ 4.1 Determinare la soluzione generale dell'equazione $y'' + 2y = 0$

4.2 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y = \cos x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

T ① 1.1 Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange

1.2 Calcolare $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{\cos x} - e^{\cosh x}}{x^2}$

T. ② 2.1 Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale

2.2 Calcolare F', con $F(x) = \displaystyle\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$

($g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, per fissare le idee)

Tempo a disposizione 2h. 30m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

⚠ **2** errori nel "prologo" comportano l'annullamento della prova.

Analisi Matematica I - 18/3/2008 Soluzioni

Prologo: 1. Se $a > b$, risulta $a \cdot c > b \cdot c \iff c > 0$

Pertanto $x > 0 \iff \dots\; x > 0$!!

2. La prima, i.e.  è continua ovunque,
la seconda è discontinua in: $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$
(disc. di salto) [si immagina la f. prolungata indefinitamente]

3. Nessuno! Infatti $|\sin x| < 1 \dots$

4. L'argomento di "log" deve essere > 0, sicché deve aversi, da $x > 0$ e $\log x > 0$,

$x > 1$

5. Posto $x > 1$, si ha subito $f'(x) = \dfrac{1}{\log x} \cdot \dfrac{1}{x}$

$$= \frac{1}{x \cdot \log x}$$

6. Dal T.F.C. è subito $F'(x) = \sin(x^3)$.

$\boxed{E\ 1}$ $\boxed{1.1.}$

$$x \sin x = x^2 + o(x^2)$$
$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$$
$$x \arctan x = x^2 + o(x^2)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cdot}{\cdot} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{1.2}$ Entrambe le serie sono tali che i loro termini generali (definitivamente positivi) $\sim \frac{1}{n^2}$, pertanto, in base al criterio di confronto asintotico, convergono entrambe.

$\boxed{1.3}$ Se $x \to +\infty$, $\arctan \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$, sicché l'integrando $\sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}$. Per il criterio di confronto asintotico, l'integrale converge se e solo se $\alpha - 1 > 1$, ossia se e solo se $\alpha > 2$.

$\boxed{E\ 2}$ $$y = x + \frac{\log x}{x} \equiv f(x)$$

dominio $D = \{ x > 0 \}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

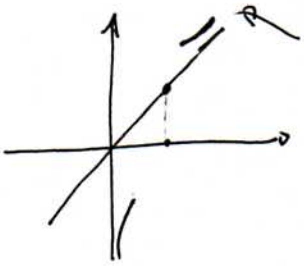
asintoto verticale: $x = 0$ (asse y)

asintoti obliqui : è immediato constatare che, dato che $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ (ex, Hopital)

$y = x$ è as. obliquo destro [si arriva alla conclusione rapidamente con la procedura generale:

$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$q = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = 0$]



si osservi che $\frac{\log x}{x} > 0$ per $x > 1$...

$$y' = 1 + \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} = 1 + \frac{1 - \log x}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \log x}{x^2}$$

$x^2 + 1 - \log x > 0 \quad \forall x > 0 \longrightarrow$

in modo rigoroso: se $0 < x \leq 1$ $\quad x^2 + 1 > 0$

$\log x < 0$ ok

$x = 1 \qquad 2 > 0$

se $g(x) = x^2 + 1 - \log x$, è $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x} > 0$ per $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow g$ è s. crescente $\Rightarrow g > 0$ per $x > 1$ e dunque per $x > 1$

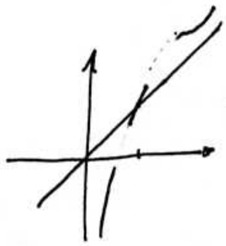
$\Rightarrow$ f è str. crescente e non ha max e min relativi,

ma neanche assoluti poiché $\lim_{x\to 0^+} f = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f = +\infty$.

$\nexists$ $\exists!$ $\bar{x}$ tale che $f(\bar{x}) = 0$, e necessariamente

$0 < \bar{x} < 1$ $\quad (f(1) = 1 > 0)$

[conseguenza del teorema degli zeri]



$f'(1) = 2$

calcoliamo f'':

$\boxed{f' = \frac{x^2+1-\log x}{x^2}}$

$$y'' = \frac{(2x - \frac{1}{x})x^2 - (x^2+1-\log x)\cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{\cancel{2x^3} - x - \cancel{2x^3} - 2x + 2x\log x}{x^4} =$$

$$= \frac{x\cdot[2\log x - 3]}{x^4} = \frac{2\log x - 3}{x^3}\quad x^3 > 0$$

$2\log x = 3$

$\log x = \frac{3}{2}$

$x = e^{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow$ f'': $e^{\frac{3}{2}}$ ← flesso

---- 0 ———

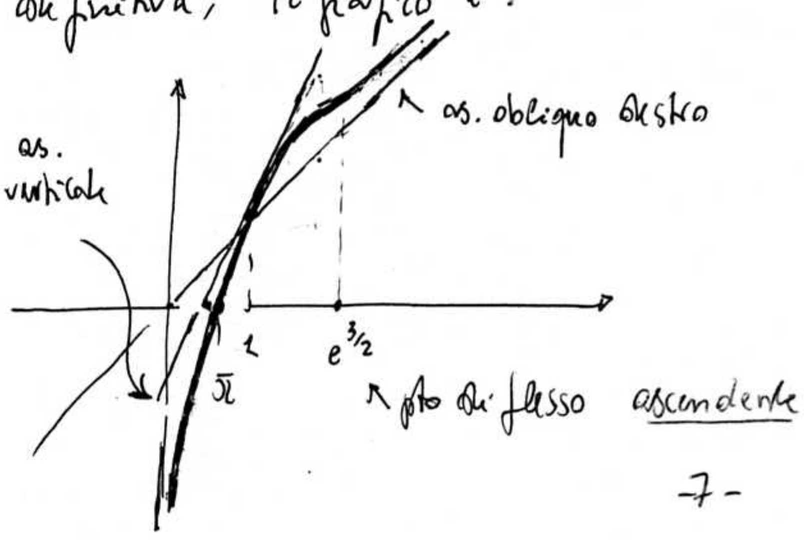
concava $\quad$ convessa

$$f'(e^{\frac{3}{2}}) = \frac{e^3+1-\frac{3}{2}}{e^3} =$$

$$= \frac{e^3 - \frac{1}{2}}{e^3} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^3}$$

$(\bar{x} > \frac{1}{2} \dots)$

$\Rightarrow$ in definitiva, il grafico è:



E 3.

$\boxed{3.1}$ $$I = \int_1^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx$$

1° modo: $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2+1}\;dx^2 =$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2+1}\;d(x^2+1) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + c$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\left(5^{3/2}-2^{3/2}\right)$$

2° modo $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx =$ (posto $x = \sinh t$, $dx = \cosh t$ e ric. che $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

$$\int \cosh^2 t\;\underbrace{\sinh t\,dt}_{d(\cosh t)} = \frac{(\cos h)^3 t}{3} + c$$

$\cosh^3 t = (\cosh^2 t)^{3/2} = (1+x^2)^{3/2}$

e si ritrova il risultato precedente.

$\boxed{3.2}$ Dalla formula generale $V = \pi\int_a^b f^2\,dx$ si trova subito

$$\bar{V} = \pi\cdot I = \frac{\pi}{3}\left(5^{3/2}-2^{3/2}\right)$$

3.3

$$I = \int x^2 \sqrt{1+x^2}\, dx$$

poniamo $x = \sinh t \qquad dx = \cosh t\, dt$

$1 + x^2 = \cosh^2 t$

$\sinh 2t = 2 \sinh t \cosh t$

$$\Rightarrow \int \sinh^2 t \cosh^2 t \, dt = \frac{1}{4} \int \sinh^2 (2t)\, dt =$$

$$\frac{1}{8} \int \sinh^2 (2t)\, d(2t) = \frac{1}{8} \int \sinh^2 \xi \, d\xi \qquad \xi = 2t$$

Ma:

$$\int \sinh^2 \xi \, d\xi = \int \sinh \xi \, d \cosh \xi = \sinh \xi \cosh \xi - \int \cosh \xi \, d \sinh \xi$$

$$= \sinh \xi \cosh \xi - \int \underbrace{\cosh^2 \xi}_{1+\mathrm{sh}^2 \xi} \, d\xi = \sinh \xi \cosh \xi - \xi - \int \sinh^2 \xi \, d\xi$$

$$= 2 \int \sinh^2 \xi = \sinh \xi \cosh \xi - \xi \qquad + c$$

$\Rightarrow$! (perchè?)

$$I = \frac{1}{8} \int \sinh^2 \xi \, d\xi = \frac{1}{16} (\sinh \xi \cosh \xi - \xi) + c$$

$\cosh 2t = 2\cosh^2 t - 1$

$$= \frac{1}{16} \left[2 \sinh t \cdot \cosh t \cdot (2 \cosh^2 t - 1) - 2t \right] + c$$

$$= \frac{1}{8} \left[x \sqrt{1+x^2} \left[2x^2 + 1 \right] - \underbrace{\mathrm{sh}^{-1} x}_{= \log(x + \sqrt{x^2+1})} \right] + c$$

$\boxed{\text{Controllo}}$:

$$f = \frac{1}{8}\left(x\sqrt{1+x^2}\,(2x^2+1) - \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)$$

$$f' = \frac{1}{8}\left[\sqrt{1+x^2}\,(2x^2+1) + x\,\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}(2x^2+1) + x\sqrt{1+x^2}\cdot 4x - \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\cdot\cancel{2}x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\sqrt{1+x^2}\,(2x^2+1) + \frac{x^2(2x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}} + 4x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(\frac{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}+x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\right.\right.$$

$$= \frac{1}{8}\left[\sqrt{1+x^2}\,(6x^2+1) + \frac{x^2(2x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\sqrt{1+x^2}\left[6x^2+1\right] + \frac{x^2(2x^2+1)-1}{\sqrt{1+x^2}}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\,\frac{(1+x^2)\left[6x^2+1\right] + 2x^4+x^2-1\,)}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{8}\,\frac{6x^2+6x^4\cancel{+1}+x^2+2x^4+x^2\cancel{-1}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{\cancel{8}}\,\frac{\cancel{8}x^4+\cancel{8}x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^2(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}} = x^2\sqrt{1+x^2}$$

✓

$\boxed{E \cdot 4}$ 4.1. $$y'' + 2y = 0$$

eq. caratt.: $\lambda^2 + 2 = 0 \Rightarrow$ [oscillatore armonico $\omega = \sqrt{2}$]

sol. gen.: $$y(x) = a\cos(\sqrt{2}\,x) + b\sin(\sqrt{2}\,x)$$

$(\diamond)\ y'' + 2y = \cos x$

4.2 Cerchiamo una sol. particolare nella forma

$$y = A\cos x + B\sin x \qquad \text{(Ansatz)}$$

Si trova allora

$$y' = -A\sin x + B\cos x$$
$$y'' = -A\cos x - B\sin x$$

e, sostituendo in $(\diamond)$,

$$-A\cos x - B\sin x + 2(A\cos x + B\sin x) = \cos x$$

$$\underbrace{(-A + 2A)}_{A}\cos x + \underbrace{(-B + 2B)}_{B}\sin x = \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \quad A = 1, \quad B = 0$, cioè una sol. particolare

è $\quad \tilde{y} = \cos x \quad$ [verifica: $-\cos x + 2\cos x = \cos x$]

Dunque la sol. gen. di $(\diamond)$ è

$$y(x) = \underbrace{a\cos x + b\sin x}_{\text{eq. omogenea}} + \underbrace{\cos x}_{\text{sol. part.}}$$

$$= (a+1)\cos x + b\sin x \equiv \tilde{a}\cos x + \tilde{b}\sin x$$

imponiamo le cond. di Cauchy :

$$y' = -\hat{a} \sin x + \tilde{b} \cos x$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = \tilde{a} = 1 \\ y'(0) = \tilde{b} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \tilde{a} = 1 \\ \tilde{b} = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ la sol richiesta è $y(x) = \cos x$

★ Si poteva vedere a priori che effettivamente, tale funzione verificava sia l'equazione che le condizioni iniziali, e dunque, per l'unicità, era proprio la soluzione del problema dato.