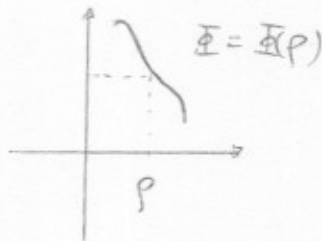


◇ II^a forma fondamentale per le superficie
di rivoluzione

Si ricordi (cap. VII)

$$\begin{cases} E = 1 + \Phi'^2 \\ F = 0 \\ G = \rho^2 \end{cases}$$



$$l = \frac{d}{d\rho}$$

$$\underline{r} = \underline{r}(\rho, \varphi) =$$

$$(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \Phi(\rho))$$

$$\underline{r}_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, \Phi'(\rho))$$

$$\underline{r}_\varphi = (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0)$$

$$\underline{N} = \left(-\frac{\Phi'}{\sqrt{1+\Phi'^2}} \cos \varphi, -\frac{\Phi'}{\sqrt{1+\Phi'^2}} \sin \varphi, \frac{1}{\sqrt{1+\Phi'^2}} \right)$$

Calcoliamo la II^a
forma fondamentale

$$\underline{r}_{\rho\rho} = (0, 0, \Phi''(\rho))$$

$$\underline{r}_{\rho\varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) = \underline{r}_{\varphi\rho}$$

$$\underline{r}_{\varphi\varphi} = (-\rho \cos \varphi, -\rho \sin \varphi, 0)$$

$$\Rightarrow e = \langle \underline{r}_{\rho\rho}, \underline{N} \rangle = \Phi''(\rho) (1+\Phi'^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f = \langle \underline{r}_{\rho\varphi}, \underline{N} \rangle = \dots = 0 \rightarrow$$

$$g = \langle \underline{r}_{\varphi\varphi}, \underline{N} \rangle =$$

$$= \frac{\rho \Phi'}{\sqrt{1+\Phi'^2}} (\overbrace{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}) = \frac{\rho \Phi'}{\sqrt{1+\Phi'^2}} ; \text{ dunque:}$$

II^a forma fondamentale

$$e = \frac{\Phi''}{\sqrt{1+\Phi'^2}}, \quad f = 0, \quad g = \frac{\rho \Phi'}{\sqrt{1+\Phi'^2}}$$

Si ha allora

$$K = \frac{eg - f^2}{Eg - F^2} = \frac{eg}{Eg} \quad \left(= \frac{e}{E} \cdot \frac{g}{g} \right)$$

$$= \frac{\Phi'' \cdot \rho \cdot \Phi'}{(1 + \Phi'^2)^2 \rho^2} = \frac{\Phi' \cdot \Phi''}{(1 + \Phi'^2)^2 \cdot \rho}$$

Da $H = \frac{1}{2} \frac{ge - 2Ff + Eg}{Eg - F^2}$

si ha: $H = \frac{1}{2} \frac{ge + Eg}{Eg} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{e}{E} \right) + \left(\frac{g}{g} \right) \right]$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{e}{E}, \quad R_2 = \frac{g}{g}$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{e}{E} = \frac{\Phi''}{(1 + \Phi'^2)^{3/2}} \quad *$$

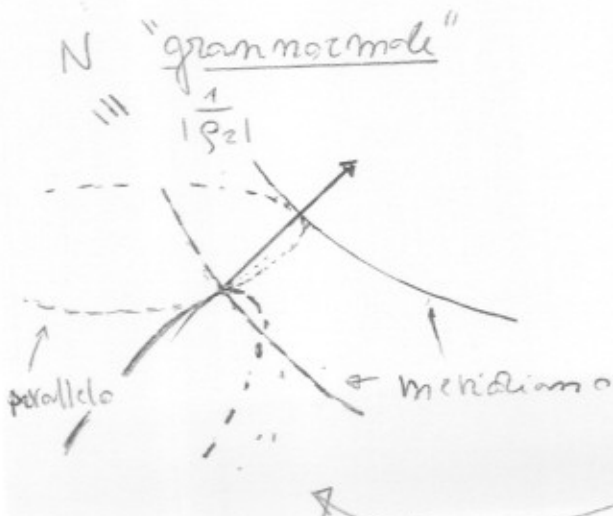
Chiamo κ la curvatura del generico meridiano

$$\frac{1}{R_2} \equiv R_2 = \frac{g}{g} = \frac{\Phi'}{\rho \sqrt{1 + \Phi'^2}}$$

curvatura della linea normale tangente ad un parallelo

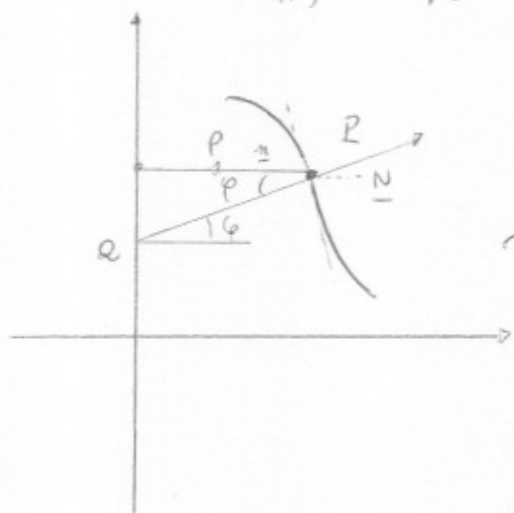
(NON è la curvatura del parallelo!))

questa $\hat{=}$ uguale a $\frac{1}{\rho}$!!



★ Teorema i) Si ha: $\rho = N \cos \varphi$
 v. figura ↑ ↙ grannormale
raggio del parallelo
per E "latitudine"

ii) $N = \overline{ER}$

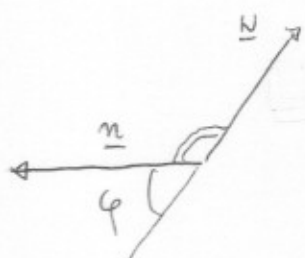


Dire: i) è immediata
 dal teorema di Meusnier:

$$r_m = -r \cdot \cos \varphi$$

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{\rho} \cos \varphi$$

$$\rho = N \cos \varphi$$

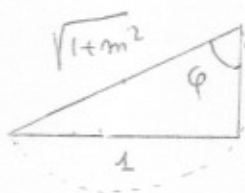


$$\langle \underline{n}, \underline{N} \rangle = \cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$$

ii) segue subito da i) e dalla figura.

Osserviamo, in alternativa, che

$$\frac{1}{N} = \frac{\Phi'}{\sqrt{1+\Phi'^2}} \frac{1}{\rho}$$

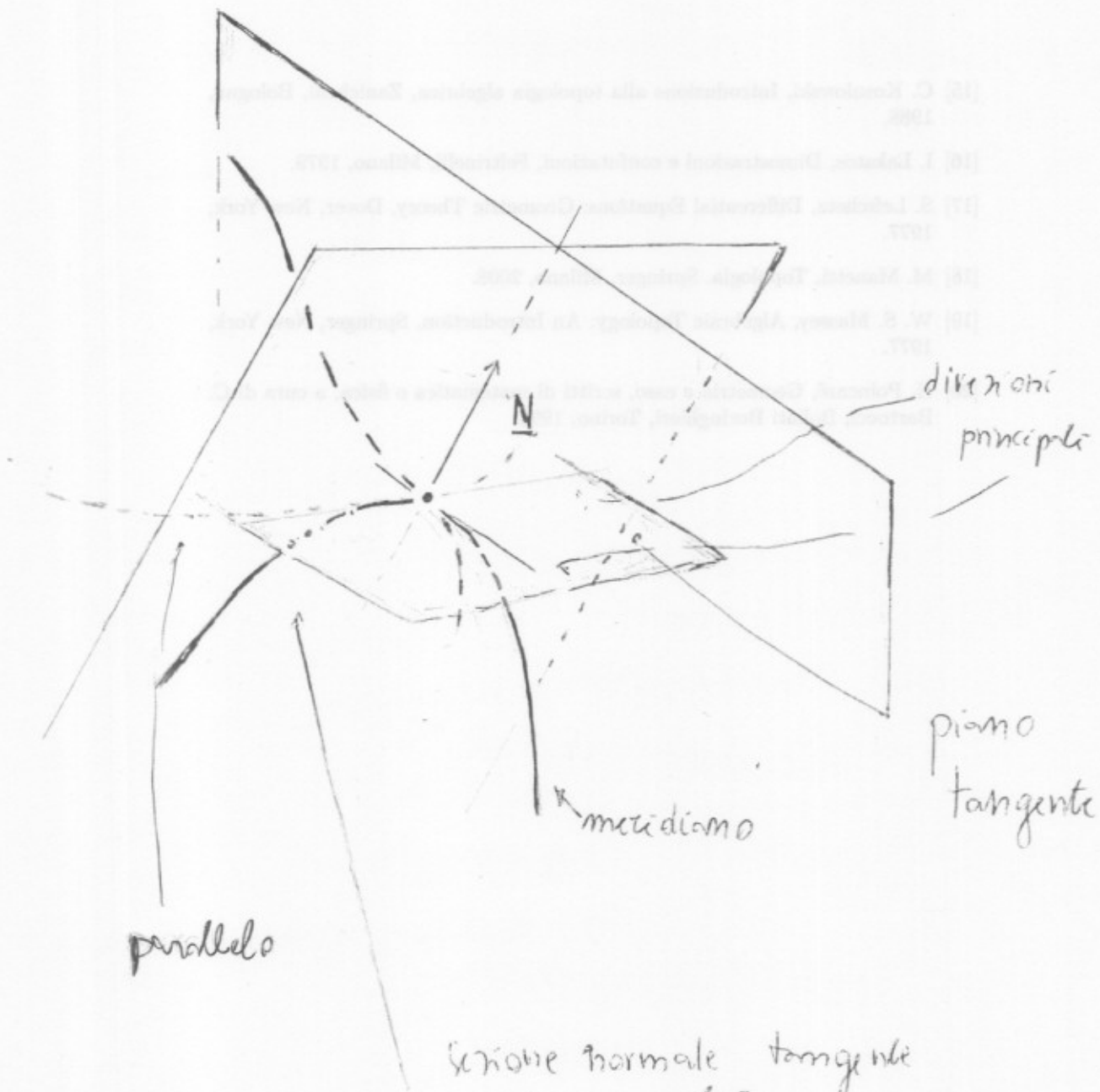


$$m = \cotan \varphi$$

$$\frac{m}{\sqrt{1+m^2}} = \cos \varphi$$

$$\frac{\cotan \varphi}{\sqrt{1+\cotan^2 \varphi}} = \cos \varphi$$

per via algebrica o
 geometrica



Sezione normale tangente
ad un parallelo

VIII - 20'

★ Esempi ed esercizi

◆ Data la superficie $\Sigma: z = xy$
(paraboloida iperbolica), calcolare la curvatura
(con segno)

di $\gamma: \begin{cases} z = xy \\ y = \frac{1}{3}x \end{cases}$ in $P = (0, 0, 0)$

Sol: $(0, 0)$ è critico per $f(x, y) = xy = 0$

(Messier + $H = \text{II}$)
reciproco

$$R = \frac{\text{II}_p(v)}{\|v\|^2} = \text{con } v = (3, 1) \text{ (per } \omega)$$

$$= \frac{(3 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{10}^2} = \dots = \frac{3}{5}$$

\nearrow
 $H_f(0,0) \quad 10$

◆ L'elicoide

$$\underline{r} = \underline{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ v \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} u > 0 \\ v \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Fissato u ho un'elica cilindrica...

★ $\Gamma \in \mathbb{R}^\infty$

★ Γ è iniettiva: $\underline{r}_1 = \underline{r}_2 \Rightarrow \dots \nu_1 = \nu_2$

$\Rightarrow \dots u_1 = u_2 \quad \square$

$$\underline{r}_u = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{r}_v = \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{r}_{uv} = \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{r}_{vu}$$

$$\underline{r}_{vv} = \begin{pmatrix} -u \cos v \\ -u \sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_u \times \underline{r}_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \sin v \underline{i} - \cos v \underline{j} + u \underline{k} \neq 0$$

$$\|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\|^2 = 1 + u^2 \quad (= EG - F^2)$$

$$E = 1$$

$$F = 0$$

$$G = 1 + u^2$$

$$\underline{N} = \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{\|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\|} =$$

$$= \frac{\sin v}{\sqrt{1+u^2}} \underline{i} - \frac{\cos v}{\sqrt{1+u^2}} \underline{j} + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \underline{k}$$

$$e = \langle \underline{r}_{xx} | \underline{N} \rangle = 0$$

$$f = \langle \underline{r}_{xy} | \underline{N} \rangle = \dots = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$g = \langle \underline{r}_{yy} | \underline{N} \rangle = \dots = 0$$

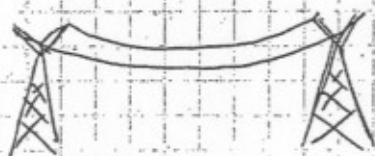
$$K = \frac{eg - f^2}{Eg - F^2} = -\frac{1}{1+u^2} = -\frac{1}{(1+u^2)^2} < 0$$

$$H = \dots = 0$$

[È un esempio di "superficie minima" (minimal surface) una lamina saponata che si adagia su un contorno chiuso opportuno lo fa in modo da minimizzare la sua area. e questa condizione conduce (.. Equazioni di Eulero-Lagrange) ad $H=0$ (.. Problema di Plateau)]

▣ La catenaria

Partiamo da $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ "catenaria"



".. un filo teso tra due estremità si dispone in modo da minimizzare l'energia potenziale \Rightarrow si dispone lungo

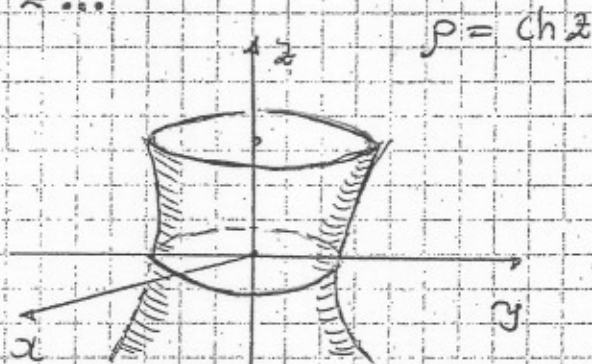
un arco di Catena.

(in un intorno di $x=0$ $\text{ch } x = 1 + \frac{x^2}{2} + \dots$
parabola

Risultato già introito da Ydilei)

★ la Catenoide si ottiene ruotando un arco di Catena attorno all'asse z ...

$$\begin{cases} x = \text{ch } z \cos \varphi \\ y = \text{ch } z \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$



★ localmente, la Catenoide è isometrica

al " cilindro " attraverso la mappa $\sigma: \varphi \rightarrow z$
 $u = \text{sh } z$

⇒ ha la stessa curvatura gaussiana (< 0)

Anche la Catenoide è una sup. minima...

◆ la pseudosfera di Beltrami ($K \equiv -1$)

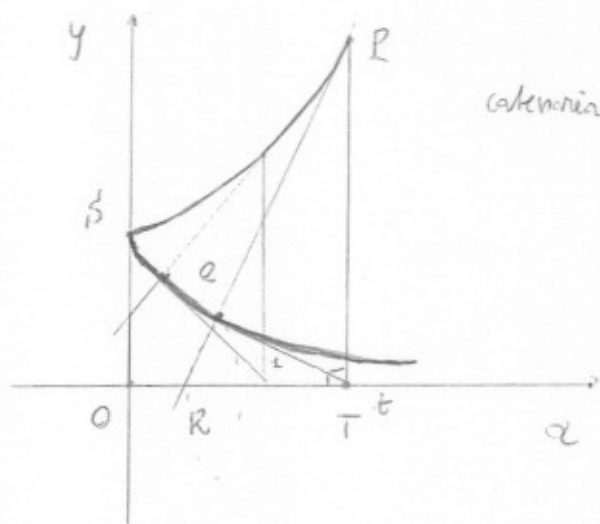
è la superficie di rivoluzione generata
da una trattrice (v. cap VIII)

Calcoliamo la curvatura gaussiana

ciò si può ottenere con le formule generali; procediamo
in modo seguente, sfruttando le considerazioni
geometriche dei capitoli precedenti.

* Curvatura della pseudosfera

riprendiamo la discussione di V-23...



catenaria

$$P: \begin{cases} x = t \\ y = \cosh t \end{cases} \quad P: (t, \cosh t)$$

$$P = t \underline{i} + \cosh t \underline{j}$$

$$\text{tralluce: } Q: \begin{cases} x = t - \tanh t \\ y = \frac{1}{\cosh t} \end{cases}$$

$$T: (t, 0)$$

$$Q: (t - \tanh t) \underline{i} + \frac{1}{\cosh t} \underline{j}$$

* Mostriamo che la tangente alla tralluce in Q passa per T:

$$\underline{Q} = \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 t}\right) \underline{i} + \frac{-\sinh t}{\cosh^2 t} \underline{j}$$

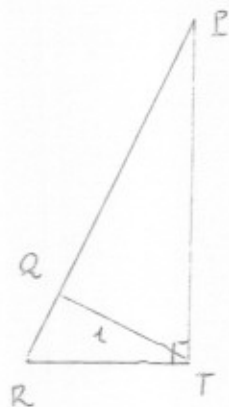
$$= \frac{\cosh^2 t - 1}{\cosh^2 t} \underline{i} - \frac{\sinh t}{\cosh^2 t} \underline{j} = \frac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t} \underline{i} - \frac{\sinh t}{\cosh^2 t} \underline{j}$$

coeff. angolare $m = -\frac{1}{\sinh t}$
retta tangente:

$$\left(y - \frac{1}{\cosh t}\right) = -\frac{1}{\sinh t} (x - t + \tanh t)$$

$$\text{Se } y = 0 \quad \dot{\bar{x}} \quad x - t + \tanh t = \tanh t \\ \Rightarrow x = t$$

In virtù del 2° teorema di Euclide applicato
al triangolo rettangolo PTR è subito



$$\overline{QR} \cdot \overline{PQ} = 1$$

ma $\overline{QR} = |\rho_1|$ $\overline{PQ} = |\rho_2|$,

"geometrico"

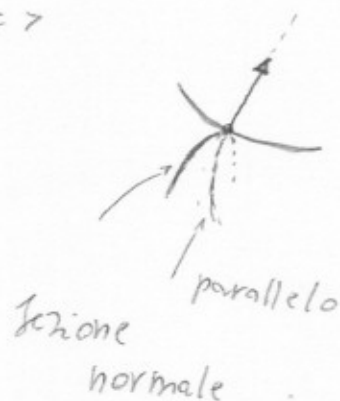
meridiano

raggi di curvatura principali (di segno opposto!)

sicché

$$\rho_1 \rho_2 = -1 \Rightarrow$$

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = -1$$



Pertanto (con qualche anticipazione...) possiamo
concludere che il primo iperbolico ha curvatura
costante $= -1$. La pseudosfera ne costituisce
un modello locale; in base ad un teorema di
Hilbert non si può fare di più: non si può
costruire una superficie completa con curvatura costante
negativa in \mathbb{R}^3 senza singolarità.

Discussione : la metrica di Fisher - Rao ***
 importantissima in statistica, economia ecc.

Prologo
 Si parte da

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

integrale gaussiano

$$\left[I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = 2\pi \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho \cdot d\rho \right.$$

(coord. polari)

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-\xi} d\xi}_1 = \pi \Rightarrow I = \sqrt{\pi} \quad \square$$

Per il generale ($\lambda > 0$)

$$\therefore I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[\sqrt{\lambda} \cdot x]^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{\lambda} \cdot x)^2} d(\sqrt{\lambda} x)}_{\sqrt{\pi}}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = \pi^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda^{-\frac{1}{2}}$$

È chiaro che

$$(*) \quad \boxed{I = \pi^{+\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^R e^{-\lambda x^2} dx = 0 \quad \text{se } R = 1, 3, 5, \dots$$

Se $R = 2h$ si procede così (integrazione dipendente da un parametro)

$$\frac{dI}{d\lambda} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \lambda} (e^{-\lambda x^2}) dx =$$

[ricordo...]

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (-x^2) e^{-\lambda x^2} dx \quad e, m$$

virtù di (*)

$$-\frac{1}{2} \cdot \pi^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda^{-\frac{3}{2}} = - \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x^2} dx$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x^2} dx}_{I_2(\lambda)} = \frac{1}{2} \pi^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda^{-\frac{3}{2}}$$

È chiaro come ottenere un'espressione generale.

Calcoliamo ancora:

[fatto per induzione...]

$$\frac{dI_2}{d\lambda} = \int_{-\infty}^{+\infty} -x^4 e^{-\lambda x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \pi^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \lambda^{-\frac{5}{2}}$$

$$= -\frac{3}{4} \pi^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\lambda x^2} dx}_{I_4(\lambda)} = \frac{3}{4} \pi^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{5}{2}}$$

Rieplaghiamo

Nota; di fatto abbiamo calcolato alcuni momenti di una mistura gaussiana, cf. corso di Probabilità....

$$I_0(\lambda) = I(\lambda) = \pi^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}}$$

$$I_2(\lambda) = \frac{1}{2} \cdot \pi^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda^{-\frac{3}{2}}$$

$$I_4(\lambda) = \frac{3}{4} \pi^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{5}{2}}$$

*** Distribuzione normale (o gaussiana)

$$p(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ : media σ : deviazione standard
 σ^2 : varianza

$p = p(x, \theta)$
 statistica parametrica $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ parametro

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, \mu, \sigma) dx = 1$$

* funzione di log-verosimiglianza

$$\log p = -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \underbrace{\log(\sqrt{2\pi} \cdot \sigma)}_{\log \sqrt{2\pi} + \log \sigma}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} (\log p) = \frac{-2(x-\mu) \cdot (-1)}{2\sigma^2} = \frac{x-\mu}{\sigma^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} (\log p) &= -\frac{(x-\mu)^2}{2} (-2) \sigma^{-3} - \frac{1}{\cancel{2} \sigma \sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^3} - \frac{1}{\sigma} \end{aligned}$$

$$\log p \equiv l(\cdot, \theta)$$

$\nabla l = (\partial_i l)$ funzione punteggio
 $\partial_i = \partial_{\theta_i}$ (score function)

$$\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} (\log p) = -\frac{1}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \sigma} () = \frac{\partial^2}{\partial \sigma \partial \mu} = -2(x - \mu) \sigma^{-2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} () &= (x - \mu)^2 (-3) \sigma^{-4} + \sigma^{-1} \\ &= -3(x - \mu)^2 \sigma^{-4} + \sigma^{-1} \end{aligned}$$

*** Informazione di Fisher (metrica di Fisher-Rao)
valore medio di $\partial l \partial l \dots$

$$g_{ij}(\theta) = \langle \partial_i l, \partial_j l \rangle = \int \partial_i l \partial_j l \, d\mu$$

(μ, σ)
1, 2

$l = \log p$ ★ Score function
(J. punteggio)

"Calcolemus!"
 È effettivamente una metrica
 $g_{ij} = g_{ji}$ (chimo) ed è def. positiva

È subito visto che $g_{12} = g_{21} = 0$

v. E. Marzotto - M. Salmon : Applications of
 Differential geometry to econometrics

$$g_{11} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{x-\mu}{\sigma} \right]^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = \xi$$

$$x-\mu = \sigma \cdot \xi$$

$$x = \mu + \sigma \xi$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \frac{1}{\sigma^2} \int_{\mathbb{R}} \xi^2 e^{-\frac{1}{2} \xi^2} d(\sigma \cdot \xi)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \xi^2 e^{-\frac{1}{2} \xi^2} d\xi$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

$$\lambda^{-\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} =$$

$$\frac{1}{\sigma^2}$$

$$\boxed{g_{11} = \sigma^{-2}}$$

$$g_{22} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^3} - \frac{1}{\sigma} \right)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{(x-\mu)^4}{\sigma^6} - 2 \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^2} \right] e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = \xi$$

$$x = \sigma \cdot \xi + \mu$$

$$dx = \sigma \cdot d\xi$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \int_{\mathbb{R}} (\xi^4 - 2\xi^2 + 1) e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi \cdot \sigma$$

$$g_{22} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma^2} \left[\frac{3}{4} \sqrt{\pi} \cdot 2^{\frac{5}{2}} - 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot 2^{\frac{3}{2}} + \sqrt{\pi} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{4} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} - 2 \sqrt{2} + \sqrt{2} \right)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2 \cdot \sqrt{2} \right) = \frac{2}{\sigma^2}$$

$$= 2\sigma^{-2}$$

$$E = g_{11} = \sigma^{-2} \quad F = g_{12} = g_{21} = 0$$

$$G = g_{22} = 2 \cdot \sigma^{-2}$$

$$g = \frac{1}{\sigma^2} (d\mu^2 + 2d\sigma^2)$$



★ È essenzialmente la metrica del piano iperbolico!

sia $\tilde{\sigma} = \sqrt{2} \sigma$ si ha:

$$\sigma = \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{2}} \quad \sigma^2 = \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}$$

$$g = \frac{2}{\tilde{\sigma}^2} (d\mu^2 + d\tilde{\sigma}^2)$$

$$E = \frac{2}{\tilde{\sigma}^2}$$

$$G = \frac{2}{\tilde{\sigma}^2}$$

$$= 2 \frac{d\mu^2 + d\tilde{\sigma}^2}{\tilde{\sigma}^2}$$

$$E_{\tilde{\sigma}} = 2 \cdot (-2) \tilde{\sigma}^{-3}$$

Curvatura gaussiana (v. oltre, IX)

$$K = - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\left(\frac{E_{\nu}}{\sqrt{EG}} \right)_{\nu} + \left(\frac{G_{\mu}}{\sqrt{EG}} \right)_{\mu} \right]$$

$$u = \mu$$

$$v = \tilde{\sigma}$$

$$= - \frac{1}{2 \cdot \frac{2}{\tilde{\sigma}^2}} \left(\frac{-4 \tilde{\sigma}^{-3}}{2 \cdot \tilde{\sigma}^{-2}} \right)_{\tilde{\sigma}} = - \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \cdot (-2) \cdot (\tilde{\sigma}^{-1})_{\tilde{\sigma}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \tilde{\sigma}^2 \cdot - \frac{1}{\tilde{\sigma}^2} = - \frac{1}{2}$$

* Anche più vaghiamente !! $g \mapsto \alpha g$

Se $E \mapsto \alpha E = E^*$ α costante

$(0 = F \mapsto \alpha F = 0)$

$g \mapsto \alpha g \equiv g^*$

$$K^* = - \frac{1}{2\alpha \sqrt{Eg}} \left[\left(\frac{\alpha E_{,r}}{\alpha \sqrt{Eg}} \right)_{,r} + \left(\frac{\alpha g_{,r}}{\alpha \sqrt{Eg}} \right)_{,r} \right]$$

$$= \frac{1}{\alpha} K$$

più, se la conv. della metrica standard

sul semipiano di Poincaré vale $K = -1$,

quella in questione vale $K^* = -\frac{1}{2}$ ($d=2$)

Nota:

* Possiamo anche usare la formula per le metriche conf. piane v. oltre, IX.

$$E = g = -\frac{1}{2\lambda} \Delta \log \lambda$$

$$\lambda = 2\tilde{\sigma}^{-2}$$

$$\log \lambda = \log 2 - 2 \log \tilde{\sigma}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\sigma}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mu^2}$$

$$-\Delta \log \lambda = -2 (-1) \tilde{\sigma}^{-2} = 2\tilde{\sigma}^{-2}$$

$$\Rightarrow K^* = -\frac{1}{2}$$