Esercizi per Algebra Computazionale

1. Si dimostri:

- (a) Se un polinomio $f \in K[x]$ di grado 4 o 5 su un campo K è riducibile e non ha zeri, allora possiede un divisore monico irriducibile di secondo grado.
- (b) Gli unici polinomi monici irriducibili di secondo grado in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$ sono $x^2 + 1$, $x^2 + x + 2$, e $x^2 + 2x + 2$.
- (c) $f = x^5 - x + 1$ è un polinomio irriducibile in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$, ma riducibile in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$.
- (d) Quanti elementi ha il campo $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]/(f)$?
- (e) $g = x^4 + x + 1$ è un polinomio irriducibile in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$.
- (f) Quanti elementi ha il campo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]/(g)$?

2. Sia $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

- (a) Si dimostri che il polinomio $x - 1$ divide $x^7 - 1$ e si calcoli il quoziente f .
- (b) Si elenchino i polinomi irriducibili di grado 3 in $K[x]$ e si scomponga f in polinomi irriducibili.

3. Si determini il numero di fattori nella scomposizione in fattori irriducibili di $x^{63} - 1$ su $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ usando la scomposizione in polinomi ciclotomici.