ALGEBRA LINEARE CON ELEMENTI DI GEOMETRIA

modulo: ELEMENTI DI GEOMETRIA (Prof. M. Spera)

Prova scritta del 21 febbraio 2012

(1) Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, e ampliato proiettivamente, si determini la conica $\mathcal{C}$ con centro in $C: [0,1,3]$, tangente a $r: y = 2x$ in $O: [1,0,0]$ e passante per $P: [1,0,4]$. Se ne individuino il fuoco e la direttrice.

Si abbozzi altresì il grafico di $\mathcal{C}$.

(2) Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, si determini la simmetria obliqua attorno a $r: -x+y+1=0$ lungo la direzione $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$.
Dire se si tratta di un movimento rigido.
Considerato poi il pto $P: (2,1)$, se ne individuino le coordinate baricentriche rispetto ad ABC, con $A: (0,0)$, $B: (1,0)$, $C: (0,1)$. Determinare poi le coordinate baricentriche di P' rispetto ad $A'B'C'$, immagini di P, A, B, C, risp., tramite la simmetria obliqua testé considerata.

Tempo a disposizione: 1h 15m

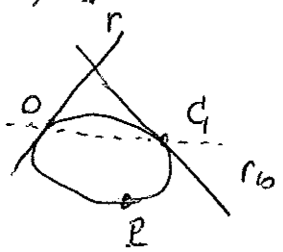
Le risposte vanno adeguatamente giustificate

1

conica con centro in $C:[0,1,3]$

tangente $r: \; y=2x$ in $O:[1,0,0]$

passante per $P:[1,0,4]$



È una parabola. troviamo OC:

$$OC: \qquad y = 3x$$

fascio di coniche bitangenti

$$r r_\infty + \lambda\, OC^2 = 0$$

$$x_0(2x_1 - x_2) + \lambda(3x_1 - x_2)^2 = 0$$

forma non omogenea: $(2x-y) + \lambda(3x-y)^2 = 0$

passaggio per P:

$$\underbrace{2\cdot 0}_{0} - 4 + \lambda(\underbrace{3\cdot 0}_{0} - 4)^2 = 0$$

$$-\cancel{4} + \lambda \cdot 4^{\cancel{2}} = 0 \qquad \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$$

$$(*) \qquad \boxed{2x - y + \frac{1}{4}(3x-y)^2 = 0}$$

$$(3x-y)^2 + 8x - 4y = 0$$

$$9x^2 - 6xy + y^2 + 8x - 4y = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha_{00} = 0 \quad \text{ok}$$

diametri: $\qquad y = 3x + k$

a: asse : è la polare del punto rappr. la direzione ortogonale ai diametri, vale a dire, di

$$C^{\perp} = [0, -3, 1]$$

$$(x_0 \;\; x_1 \;\; x_2)\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0 \;\; x_1 \;\; x_2)\begin{pmatrix} \overbrace{-12-2}^{-14} \\ \overbrace{-27-3}^{-30} \\ \underbrace{9+1}_{10} \end{pmatrix} = 0$$

$$-14x_0 - 30x_1 + 10x_2 = 0$$

$$15x_1 - 5x_2 + 7x_0 = 0$$

$$\boxed{\text{a: asse} \quad 15x - 5y + 7 = 0}$$

vertice = $\mathcal{C} \cap a$: riprendiamo (*)

$$3x - y + \frac{7}{5} = 0$$

$$3x - y = -\frac{7}{5}$$

$$-\frac{7}{5} - x + \frac{1}{4}\left(-\frac{7}{5}\right)^2 = 0$$

$$2x - y = 3x - y - x = -\frac{7}{5} - x$$

$$x = \frac{1}{4}\left(-\frac{7}{5}\right)^2 - \frac{7}{5}$$

$$= \left(-\frac{7}{5}\right)\left[\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{7}{5}\right)+1\right] = -\frac{7}{5}\cdot\left(-\frac{7}{20}+1\right) =$$

$$= \left(-\frac{7}{5}\right)\cdot\left(+\frac{13}{20}\right) = -\frac{91}{100} \qquad V: \left(-\frac{91}{100}, -\frac{133}{100}\right)$$

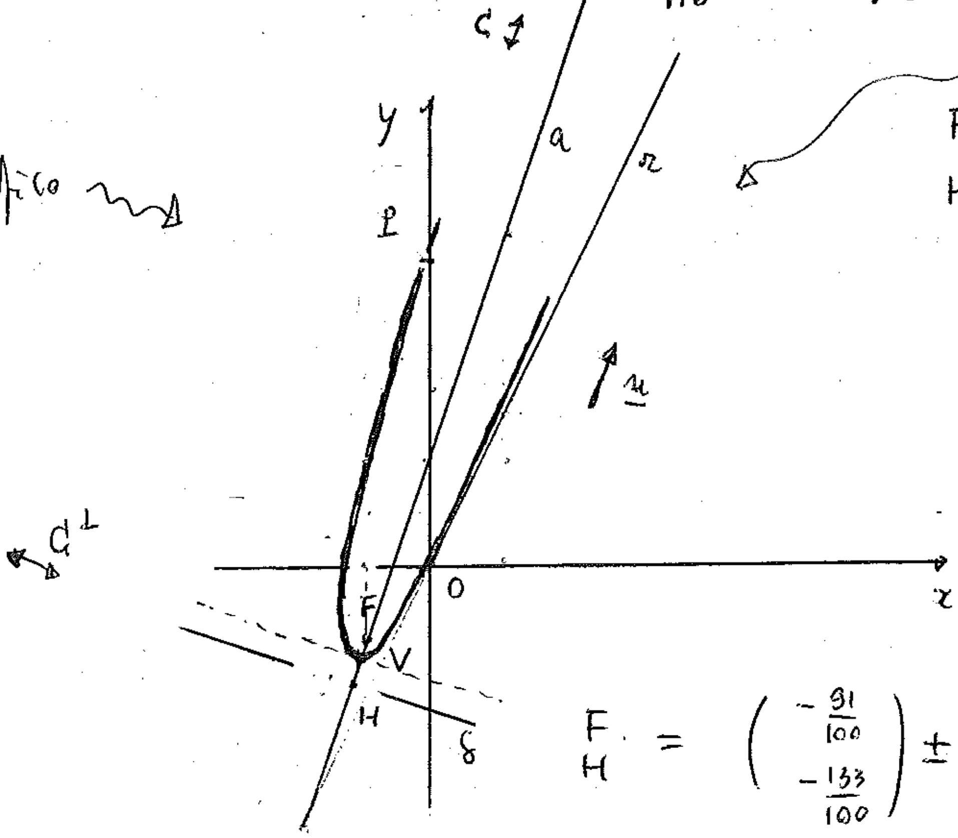
$$y = 3x + \frac{7}{5} = -3\,\frac{91}{100} + \frac{7}{5} = \frac{-273+140}{100} = -\frac{133}{100}$$

parametro $\qquad p = \sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma^3}}$ $\qquad$ 273 140 133

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \alpha_{00} &= 0 \\ \text{(Sarrus)} \quad \alpha &= 24+24-36-16 \\ &= 48-52 = -4 \\ \gamma &= 9+1 = 10 \end{aligned}$$

$$p = \sqrt{\frac{4}{10^3}} = \frac{2}{10\sqrt{10}} = \frac{1}{5\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{50}$$

grafico



notare

$$F = V + \frac{p}{2}\,\underline{u}$$
$$H = V - \frac{p}{2}\,\underline{u}$$
$$\underline{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\begin{matrix} F \\ H \end{matrix} = \begin{pmatrix} -\frac{91}{100} \\ -\frac{133}{100} \end{pmatrix} \pm \frac{1}{10\sqrt{10}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{91}{100} \\ -\frac{133}{100} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-91\pm 1}{100} \\ \frac{-133\pm 3}{100} \end{pmatrix}$$

$$F = \left(\frac{-90}{100}, \frac{-130}{100}\right) = \left(\frac{-9}{10}, -\frac{13}{10}\right)$$

136 24
16 34

$$H = \left(\frac{-92}{100}, \frac{-136}{100}\right) = \left(-\frac{23}{25}, -\frac{34}{25}\right)$$

controllo : direttrice = polare di F $\rightarrow$ δ: $y + \frac{34}{25} = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{23}{25}\right)$

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{23}{75} - \frac{34}{25} \qquad \frac{34}{3} \quad 102$$

$$= -\frac{1}{3}x - \frac{23+102}{75}$$

$$= -\frac{1}{3}x - \frac{125}{75} = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$$

$$(x_0 \ x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{9}{10} \\ -\frac{13}{10} \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0 \ x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} \overbrace{-\frac{36}{10} + \frac{26}{10}}^{-1} \\ \overbrace{4 - \frac{81}{10} + \frac{39}{10}}^{-\frac{1}{5}} \\ \overbrace{-2 + \frac{27}{10} - \frac{13}{10}}^{-\frac{3}{5}} \end{pmatrix} = 0$$

$40 - 81 + 39$
$= 79 - 81 = -2$

$$-2 + \frac{27}{10} - \frac{13}{10} = \frac{-20+27-13}{10} = \frac{-33+27}{10} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$$

$$-x_0 - \frac{1}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_2 = 0$$

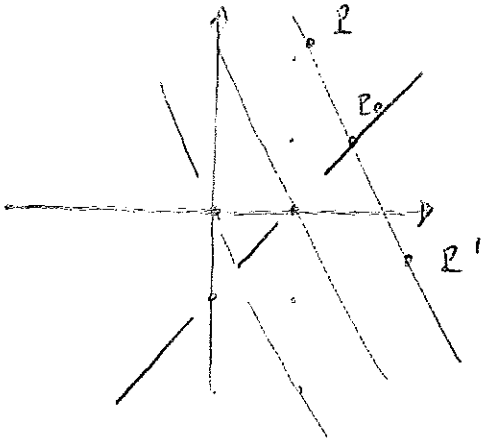
$$+1 + \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y = 0 \qquad 3y + x + 5 = 0$$

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{3} \ \checkmark$$

Elegeo 21/2/2012

(2) simmetria obliqua attorno a $r: -x+y+1=0$ $\quad y = x-1$

lungo la direzione $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$



retta r_P per $P:(a,b)$ avente direzione W:

$$\begin{cases} x = a+t \\ y = b-2t \end{cases}$$

intersezione P_0 con r.

$$-(a+t)+(b-2t)+1=0$$

$$-a-t+b-2t+1=0$$

$$-3t-a+b+1=0$$
$$3t+a-b-1=0 \qquad \tilde{t} = \frac{1}{3}(-a+b+1)$$

P' corrisponde a $2\tilde{t}$

$$P': \begin{cases} x = a+2\tilde{t} = a+\frac{2}{3}(-a+b+1) = \frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b+\frac{2}{3} \\ y = b-2(2\tilde{t}) = b-4\tilde{t} = b-\frac{4}{3}(-a+b+1) \end{cases}$$
$$= \frac{4}{3}a-\frac{1}{3}b-\frac{4}{3}$$

$P:(a,b)$

$P': \Big(\underbrace{\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}}_{a'}, \ \underbrace{\frac{4}{3}a-\frac{1}{3}b-\frac{4}{3}}_{b'} \Big)$

Se $P:(2,1)$

$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{6}{3}=2$ ✓

$\frac{8}{3}-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}=\frac{3}{3}=1$ ✓

$$a' = \frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}$$
$$b' = \frac{4}{3}a-\frac{1}{3}b-\frac{4}{3}$$

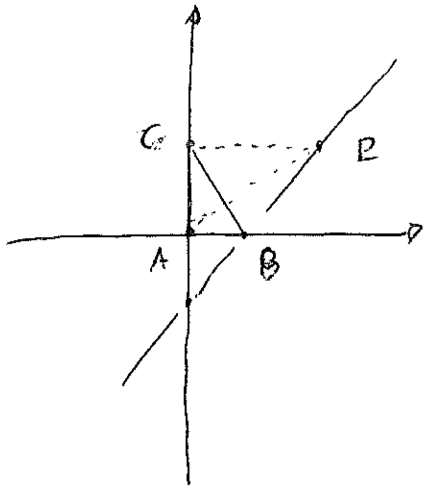
$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -\frac{1}{9}-\frac{8}{9} = -\frac{9}{9} = -1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \leftarrow \hat{A}$$

conserva le aree, cambiando l'orientamento

non è un movimento rigido

Dato ABC $\quad A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$



coord. baricentriche di

$P: (2,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$u = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{1}} = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 \end{matrix} & 1 \end{vmatrix}}{1} = -2 \qquad (v)$$

$$v = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad (v)$$

$$w = 1 - 2 + 2 = 1 \qquad (v)$$

controllo $\quad w = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad (v)$

coord. bar. di P' risp. ad $A'B'C'$:

le stesse (invarianza per affinità)