Insegnamento di Laboratorio di algoritmi e strutture dati

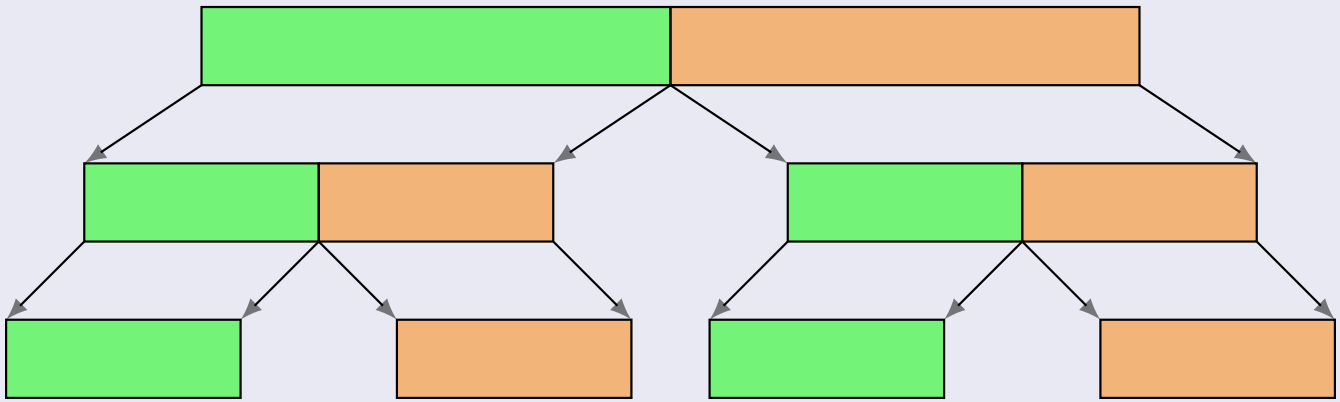
Programmazione dinamica

Roberto Posenato

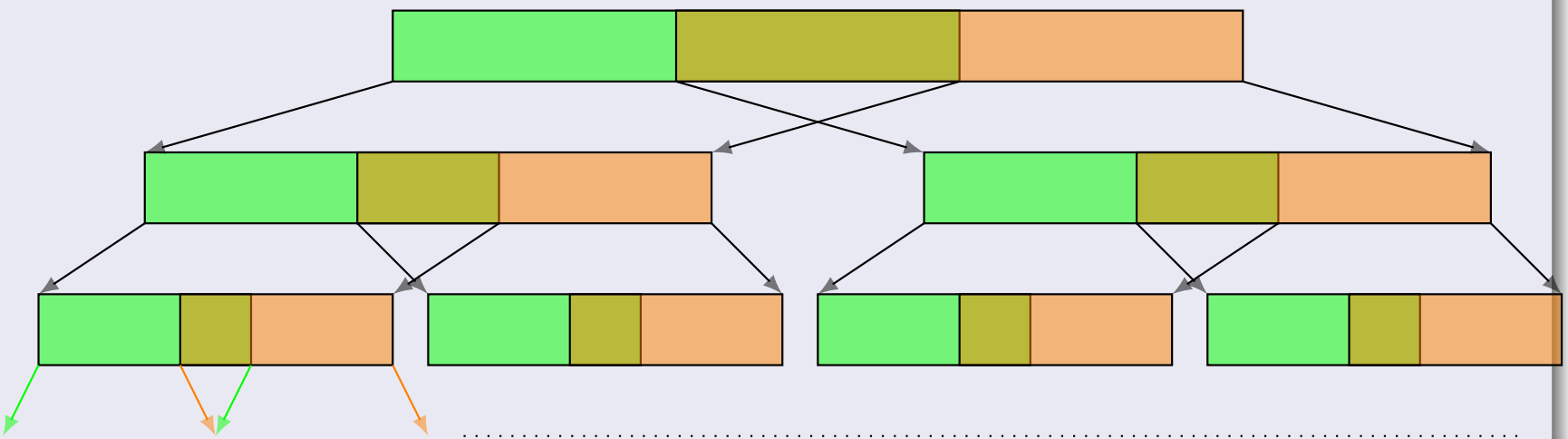
ver. 0.6, 31/01/2008

Introduzione

Quando si deve applicare la ricorsione



Quando non si deve applicare la ricorsione, ma la progr. dinamica



Introduzione

Calcolo numero di Fibonacci

Esempio 1 (Soluzione ricorsiva)

```
public long fib(int n) {
    if (n < 0) throw new IllegalArgumentException(
        "Il parametro non può essere negativo."
    );

    if (n <= 1) return n;
    else return ( fib(n-1) + fib(n-2) );
}
```

- primi termini calcolati un numero esponenziale di volte;
- complessità in tempo $= \Omega\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n\right)$

Introduzione

Calcolo numero di Fibonacci

Esempio 2 (Approccio programmazione dinamica)

```
public long fibD(int n) {
    if (n < 0) throw new IllegalArgumentException(
        "Il parametro non può essere negativo."
    );

    long risultato[] = new long[n+1];
    risultato[0] = 0; risultato[1] = 1;
    for (int k = 2; k <= n; k++)
        risultato[k]=risultato[k-1]+risultato[k-2];
    return risultato[n];
}
```

- memorizzazione risultati parziali
- complessità tempo = complessità in spazio = $\Theta(n)$;

Introduzione

Calcolo numero di Fibonacci

Esempio 3 (Approccio programmazione dinamica ottimizzato)

```
public long fibDO(int n) {
    if (n < 0) throw new IllegalArgumentException(
        "Il parametro non può essere negativo."
    );
    if (n <= 1) return n;
    long terminePrecedente=0, risultato=1, temp=0;
    for (int k = 2; (k <= n); k++) {
        temp = risultato;
        risultato += terminePrecedente;
        terminePrecedente = temp;
    }
    return risultato;
}
```

- memorizzazione solo dei risultati parziali necessari
- complessità tempo $= \Theta(n)$
- complessità in spazio $= \Theta(1)$

Programmazione dinamica
Generalità

- Si consideri un programma ricorsivo, rappresentato dalla chiamate $\{P_1, P_2, \ldots, P_M\}$
- Sia P_1 la chiamata principale con un solo parametro (per semplicità)
- Sia $[P_k, x]$ con $1 \leq k \leq M$, l'invocazione con il parametro x
- $[P_k, x]$ dipende da $[P_s, y]$ se esecuzione $P_k(x)$ richiede calcolo $P_s(y)$
- Dato $[P_1, z]$, si definisce l'ordine lineare $(L[P_1, z], <)$:
  - $L[P_1, z] = \{[P_s, y] \mid [P_1, z] \text{ dipende da } [P_s, y]\}$
  - Se $[P_k, x], [P_s, y] \in L[P_1, z]$ e $[P_k, x]$ dipende $[P_s, y]$, allora $[P_s, y] < [P_k, x]$

Programmazione dinamica
Generalità

- Dato $(L[P_1, z], <)$, si definiscano
  - FIRST = elemento più piccolo
  - LAST = $[P_1, z]$
  - $Succ([P_s, x])$ = elemento successivo nell'ordine lineare
  - $Succ([P_1, z])$ = null, in quanto non esiste!
- Algoritmo di programmazione dinamica che emula P_1
  - Dato z, costruisce vettore V con indici in $L[P_1, z]$ a partire da FIRST
  - restituisce $V[[P_1, z]]$

Programmazione dinamica
Generalità

Procedura $\mathtt{DP}_1(z)$

1: Definisci ordine lineare $L[P_1, z]$;
2: $i = FIRST$;
3: **while** $(i != null)$ **do**
4: **if** $(i == [P_k, x])$ **then**
5: esegui $P_k(x)$ con le seguenti interpretazioni:;
6: - eventuali chiamate ricorsive '$b = P_s(l)$' come '$b = V[[P_s, l]]$';
7: - l'istruzione 'return E' come '$V[i] = E$';
8: **endif**
9: $u = i$;
10: $i = Succ(i)$;
11: **endw**
12: **return** $V[u]$;

Programmazione dinamica
Generalità

Praticamente

- programmazione dinamica impiegata per risolvere problemi di ottimizzazione
- Passi per sviluppo algoritmo:
  1. caratterizzare struttura soluzioni ottimali
  2. definire in modo ricorsivo la soluzione ottimale
  3. fissare un naturale ordine lineare sulle chiamate ricorsive (calcolare valore dal basso-verso- alto)
  4. sostituire le chiamate con gli assegnamenti
  5. ottimizzare spazio usato, se possibile

Programmazione dinamica

Problema della massima sottosequenza comune

Problema della massima sottosequenza comune (MaxSSC)

Definizioni preliminari:

- Dato $X = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle, Z = \langle z_1, \ldots, z_k \rangle$ è sotto sequenza di X se esiste sequenza crescente $\langle i_1, \ldots, i_k \rangle$ di indici t.c. $\forall j \in \{1, \ldots, k\}\ x_{i_j} = z_j$
- Esempio:
  - $X = \langle a, b, c, b, d, a, b \rangle$
  - $Z = \langle b, c, d, b \rangle$ in quanto la sequenza associata, $\langle 2, 3, 5, 7 \rangle$, soddisfa le condizioni

Programmazione dinamica

Problema della massima sottosequenza comune

Problema della massima sottosequenza comune (MaxSSC)

- Date X e Y, Z è sotto sequenza comune di X e Y se Z è sotto sequenza di X e Y
- Esempio:
  - $X = \langle a, b, c, b, d, a, b \rangle$
  - $Y = \langle b, d, c, a, b, a \rangle$
  - $Z = \langle b, c, a, b \rangle$
- Problema massima sotto sequenza comune
  Date X e Y, determinare la sotto sequenza comune Z di lunghezza massima.

Programmazione dinamica

Problema della massima sottosequenza comune

Algoritmo forza *bruta*

- determinare tutte le sotto sequenze di X
- per ciascuna sotto sequenza, verificare se è sotto sequenza di Y, mantenendo traccia della più lunga
- complessità?

Programmazione dinamica

Problema della massima sottosequenza comune

Proprietà sotto sequenze massime

- Notazione: data $X = \langle x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m \rangle$, $X_i \stackrel{\text{def}}{=} \langle x_1, \ldots, x_i \rangle$
- Date $X = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$ e $Y = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle$ sia $Z = \langle z_1, \ldots, z_k \rangle$ la maxSSC di X e Y
- Si dimostrano le seguenti proprietà:
  1. $x_m = y_n \Longrightarrow z_k = x_m = y_n$ e Z_{k-1} è maxSSC di X_{m-1}, Y_{n-1}
  2. $$x_m \neq y_n \Longrightarrow \begin{cases} z_k \neq x_m \Longrightarrow & Z \text{ è maxSSC di } X_{m-1}, Y \\ z_k \neq y_n \Longrightarrow & Z \text{ è maxSSC di } X, Y_{n-1} \end{cases}$$

Programmazione dinamica

Problema della massima sottosequenza comune

Osservazioni circa le proprietà sotto sequenze massime

- $x_m = y_n \Longrightarrow$ si deve determinare maxSSC(X_{m-1}, Y_{n-1}) e poi appendere x_m
- $x_m \neq y_n \Longrightarrow$ si devono risolvere 2 problemi
  1. maxSSC(X_{m-1}, Y)
  2. maxSSC(X, Y_{n-1})

  e scegliere la sotto sequenza più lunga.

Nota!

Entrambi i problemi richiedono di determinare maxSSC(X_{m-1}, Y_{n-1})

Programmazione dinamica

Problema della massima sottosequenza comune

Schema programma

- $C[i,j]$ = lunghezza maxSSC per X_i e Y_j
- se $i = 0$ o $j = 0$ allora $C[i,j] = 0$
-

$$C[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \vee j = 0 \\ C[i-1,j-1]+1 & \text{se } x,y > 0 \wedge x_i = y_j \\ \max(C[i-1,j], C[i,j-1]) & \text{se } x,y > 0 \wedge x_i \neq y_j \end{cases}$$

Programmazione dinamica

Problema della massima sottosequenza comune

Metodo per il calcolo di C

```
/**
 * Costruisce la matrice delle lunghezze delle sotto
 * stringhe comuni tra x e y.
 * @param x prima stringa
 * @param y seconda stringa
 * @return la matrice delle lunghezze delle sotto stringhe
 *   comuni. Le righe rappresentano tutte le sottostringhe
 *   di x, le colonne tutte le sottostringhe di y.
 * @exception NullPointerException se x o y sono nulle.
 */
public static int[][] buildAllLengths(String x,
                                      String y) {
   if (x == null || y == null) throw
      new NullPointerException();
   int m = x.length() + 1;  //1a riga=0 per supporto
   int n = y.length() + 1;  //1a colonna=0 per supporto
...
```

Programmazione dinamica

Problema della massima sottosequenza comune

continua metodo per il calcolo di C

```
    int[][] c = new int[m][n];

    for (int i = 1; (i < m); i++) {
        for (int j = 1; (j < n); j++) {
            if ( x.charAt(i-1) == y.charAt(j-1) ) {
                // indice stringa inizia a 0
                c[i][j] = c[i - 1][j - 1] + 1;
            } else {
                c[i][j] = (c[i-1][j] >= c[i][j-1])
                          ? c[i - 1][j]
                          : c[i][j - 1];
            }
        }
    }
    return c;  // c[m-1][n-1] = lunghezza di MaxSSC
}
```

Programmazione dinamica
Esercizio

Esercizio 1

- completare la classe implementando il metodo `maxSSC()` visto a lezione;
- Eseguire dei test di correttezza. Provare con $X = \langle\rangle$ e Y qualsiasi. Provare con X completamente diverso da Y.
- Stampare il risultato della seguente istanza:
  $X = xjhdsuuidlsmahfgskslfoemwndjfkfldkdiwismsoaqq$
  $Y = dkdkjdshmalsodlwemajkddldksdowsjasuwhdkjsksjs$