Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Algebra lineare — 11 dicembre 2006

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito A

T1) Si enunci il teorema nullità + rango e lo si applichi per dimostrare i seguenti enunciati, dove V e W sono spazi vettoriali:

(1) *Sia* $f\colon V \to V$ *un'applicazione lineare; allora* f *è iniettiva se e solo se* f *è suriettiva.*
(2) *Sia* $f\colon V \to W$ *un'applicazione lineare; se* $\dim V \neq \dim W$ *e* f *è iniettiva, allora* f *non è suriettiva.*

T2) Si diano le definizioni di autovalore e autovettore per una matrice e si dimostri che, se λ_1, λ_2,..., λ_k sono autovalori distinti di una matrice $\mathbf{A}$ con autovettori rispettivamente $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_k$, allora l'insieme $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_k\}$ è linearmente indipendente.

E1) Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 1-\alpha & \alpha-1 & 1 & 0 \\ \alpha-1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1-\alpha & 0 & 1 & 0 \\ \alpha-1 & 1 & 0 & \alpha-1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione LU e, per i valori di α per i quali non è possibile, una decomposizione $P^T LU$. Si calcolino anche basi dello spazio delle colonne e dello spazio nullo di $\mathbf{A}_\alpha$, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

E2) Sia U il sottospazio di $\mathbb{C}^4$ così definito:

$$U = \left\langle \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Si trovi una base ortogonale U e la si completi a una base ortogonale di $\mathbb{C}^4$. Si determini inoltre la proiezione ortogonale $P_U(v)$, dove $\mathbf{v} = [i \quad -1 \quad 1+i \quad 0]^T$.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta & 1 & 0 & 0 \\ \beta^2 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Per $\beta = 1$, si trovi una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_1$. Se B_1 è la matrice associata a un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sia sul dominio che sul codominio, si scriva la matrice associata a f rispetto alla base canonica su dominio e codominio.