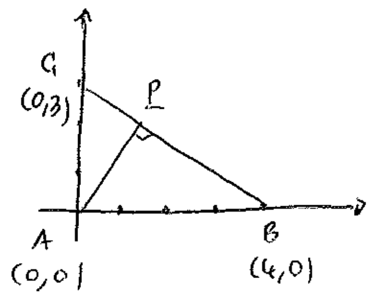
ALGEBRA LINEARE CON ELEMENTI DI GEOMETRIA mod. avanzato

Prof. M. Spera (a.a 2008/09) | Prova scritta dell' 8/9/2009

(1) 

Nel piano euclideo, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, dato il triangolo rettangolo $A:(0,0)$, $B:(4,0)$, $C:(0,3)$, dopo aver determinato le coordinate cartesiane del punto P (piede dell'altezza relativa all'ipotenusa BC), se ne determinino le coordinate baricentriche relativamente ad A, B, C, possibilmente in più modi. Scritta poi l'equazione del cerchio $\mathscr{C}$ circoscritto ad A, B, C, e data la trasformazione affine $T: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ si determinino: le coordinate baricentriche di P' rispetto ad $A'B'C'$ [$'$: gli trasformati] e l'area racchiusa da $\mathscr{C}'$ (di che tipo di curva si tratta?). Cosa si può dire di $K' = T \cdot K$ (K centro di $\mathscr{C}$)?

(2) Nel piano euclideo, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, e ampliato proiettivamente, determinare la conica $\mathscr{C}$ tangente a r_∞ in $A: [0,1,-1]$, tangente a $r: y = x$ in $B: [1,1,1]$ e passante per $C: [1,0,1]$. Determinarne in seguito fuoco e direttrice e abbozzarne il grafico.

(3) Nello spazio euclideo, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, si verifichi che le rette $r: \begin{cases} x+y+1=0 \\ z=0 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x-y+1=0 \\ z=1 \end{cases}$ sono sghembe e se ne determini la distanza e la perpendicolare comune —— Tempo a disposizione 1h 45m

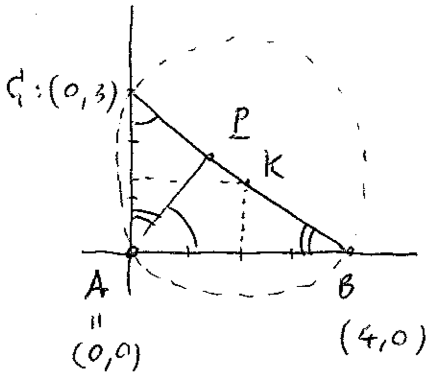
◇ ◇ ◇

(1') Data la famiglia di matrici $A_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$ determinino a, b in modo che $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sia un autovettore di $A_{a,b}$. Si dica se la matrice risultante è diagonalizzabile e, in caso affermativo, se ne determini una base di autovettori.

(2') Al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, si determinino nucleo e immagine di $A_{a,b}$ dell'es. 1'

Tempo totale: 2h 30m Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

8/9/2009



coordinate baricentriche di P

metodo rapido:

ABC è rettangolo in A

(lati $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 3$, $\overline{BC} = 5$)

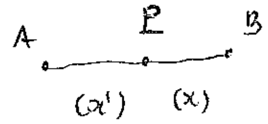
Si ha subito (Euclide)

$(u = 0)$

$$\overline{PC} \cdot \overline{BC} = \overline{AC}^2 \qquad \overline{PC} \cdot 5 = 9 \qquad \overline{PB} \cdot 5 = 16$$

$$\overline{PC} = \frac{9}{5} \qquad \overline{PB} = \frac{16}{5}$$

$P = xA + x'B$



$$\Rightarrow \quad P = vB + wC = \frac{9}{25}B + \frac{16}{25}C \qquad \frac{v}{w} = \frac{9}{16}$$

Altro metodo (coord. bar. come rapporti di aree...)

$$u = \frac{A(PBC)}{A(ABC)} = 0 \qquad \left(A(ABC) = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6\right)$$

$$v = \frac{A(PCA)}{A(ABC)} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \quad (= \text{quadrato rapp. di sim. dei due triangoli}) = \frac{9}{25}$$

$$w = \frac{A(ABP)}{A(ABC)} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

coord. cartesiane di P

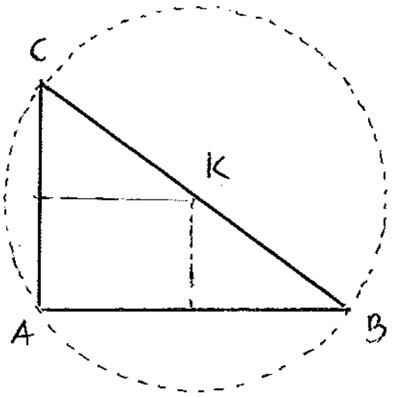
$$\frac{9}{25}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} + \frac{16}{25}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}36/25\\48/25\end{pmatrix}$$

$$P = \frac{9}{25}B + \frac{16}{25}C$$

Cerchio circoscritto: è il cerchio di centro $K : \left(2, \frac{3}{2}\right)$

e raggio $R = \frac{5}{2}$ (ovvio)

$$(x-2)^2+\left(y-\tfrac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$



$$x^2-4x+4+y^2-3y+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$$

$$x^2+y^2-4x-3y+4-\frac{16}{4}^{\,4}=0$$

$$x^2+y^2-4x-3y=0$$

(chiaro a priori: passa per $A \equiv O$ e il centro è in $K:\left(2,\tfrac{3}{2}\right)$ ...)

Area : $A = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{25}{4}$

Trasf. affine : $T: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\leftarrow A$

(non è un mov. rigido).

Le coord. baricentriche di P' rispetto ad A', B', C', non cambiano, $\mathscr{C}'$ (immagine di $\mathscr{C}$) è un' ellisse, la cui area vale

$$A' = \det A \cdot A = 4 \cdot A = 25\pi.$$

Il centro dell' ellisse è $K' = T \cdot K$
(centro: concetto affine)

$$K' : \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2\frac{3}{2} \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2-3 \\ 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

18/9/2009

(1)

coord. cartesiane di P

retta BC : $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ (eq. segmentaria)

$$3x + 4y - 12 = 0$$

AP : $-4x + 3y = 0$

P : $\begin{cases} -4x + 3y = 0 \\ 3x + 4y - 12 = 0 \end{cases}$ $y = \frac{4}{3}x$

$$3x + 4 \cdot \frac{4}{3} x - 12 = 0$$

$$9x + 16x - 36 = 0$$

$$25x - 36 = 0 \qquad x = \frac{36}{25}$$

$$y = \frac{4}{3} \cdot \frac{36}{25} = \frac{48}{25}$$

P: $\left(\frac{36}{25}, \frac{48}{25} \right)$

trovate queste, le coordinate baricentriche di P si ottengono anche così:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{36}{25} \\ \frac{48}{25} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow u+v+w = 1$, chiaro e $\frac{36}{25} = 4v \Rightarrow v = \frac{9}{25}$

$\frac{48}{25} = 3w \Rightarrow w = \frac{16}{25}$

$\Rightarrow u = 0$

8/9/2009

② Conica tangente a r_∞ in $A = [0, 1, -1]$

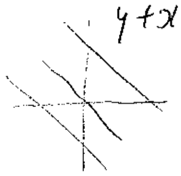
tangente a $r: \ y = x$ in $B: [1, 1, 1]$

e passante per $C_1: [1, 0, 1]$

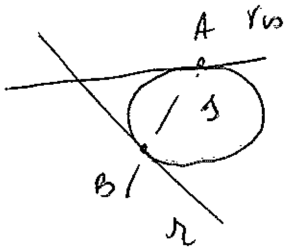
$l = 1$

$m = -1$

$y + x - k = 0$



È una parabola



$s \equiv AB$

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$r_\infty \, r + \lambda s^2 = 0$$

$$x_0 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - x_1 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$2x_0 - x_1 - x_2 = 0$$

$$\underbrace{x_0 (x_1 - x_2)}_{r_\infty \ \ r} + \lambda (\underbrace{2x_0 - x_1 - x_2}_{s})^2 = 0$$

$$x_0 x_1 - x_0 x_2 + \lambda (4x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - 4x_0 x_1 - 4x_0 x_2 + 2x_1 x_2) = 0$$

Passaggio per $C: [1, 0, 1]$ ($x_0 \ x_1 \ x_2$)

$$-1 + \lambda [4 + 1 - 4] = 0$$

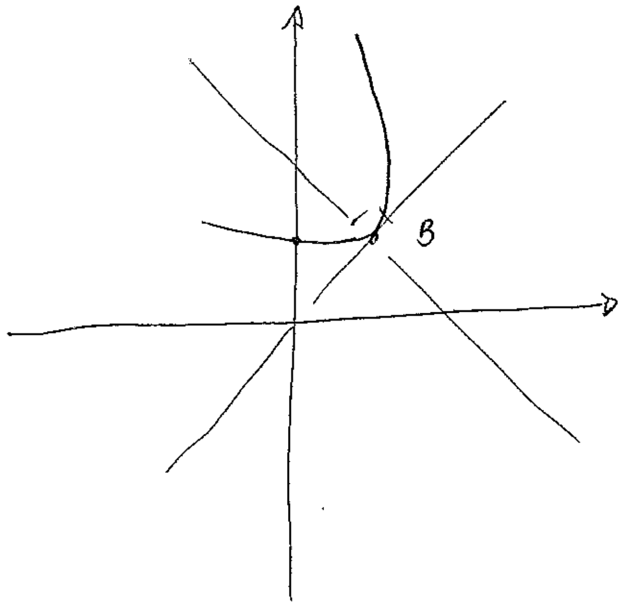
$$-1 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 1$$

$\mathscr{C}: \quad x_0x_1 - x_0x_2 + 4x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$

$- 4x_0x_1 - 4x_0x_2 + 2x_1x_2$

$$\begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{p}{\approx} \begin{pmatrix} 8 & -3 & -5 \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\alpha_{00} = 0$ ok.



ora, $B = \bar{V}$ (vertice) e $a: \ y-1 = -(x-1)$

$y - 1 = -x + 1$

$x + y - 2 = 0$

è l'asse di P

Det. F e δ

$$\Omega = \underset{L_0}{\overset{(-1)}{}} \begin{vmatrix} 8 & -3 & -5 \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -3 & -5 \\ -3 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-2) \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(\overbrace{-6+10}^{4}) = -8$$

$(\Omega_{00} = 0)$

$$\gamma = 4$$

$$p = \sqrt{-\frac{\Omega}{\gamma^3}} = \sqrt{\frac{8}{\underset{=64}{4^3}}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad F = \overset{V}{\overset{\shortparallel}{B}} + \frac{p}{2}\,\underline{u} \qquad \underline{u} : \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

per ovvie ragioni geometriche

B

$$F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{8} \\ 1 + \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{9}{8} \end{pmatrix}$$

$$H = B - \frac{p}{2}\,\underline{u} = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} \\ \frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

$$x - y - \frac{1}{4} = 0$$

$$4x - 4y - 1 = 0 \quad \delta$$

$$\delta: \quad y - \frac{7}{8} = x - \frac{9}{8} \qquad x - y - \frac{9}{8} + \frac{7}{8} = 0$$

controllo: f = polare di F

$$(x_0\ x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 8 & -3 & -5 \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{7}{8} \\ \frac{9}{8} \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{64-21-45}{8} = -\frac{1}{4}$$

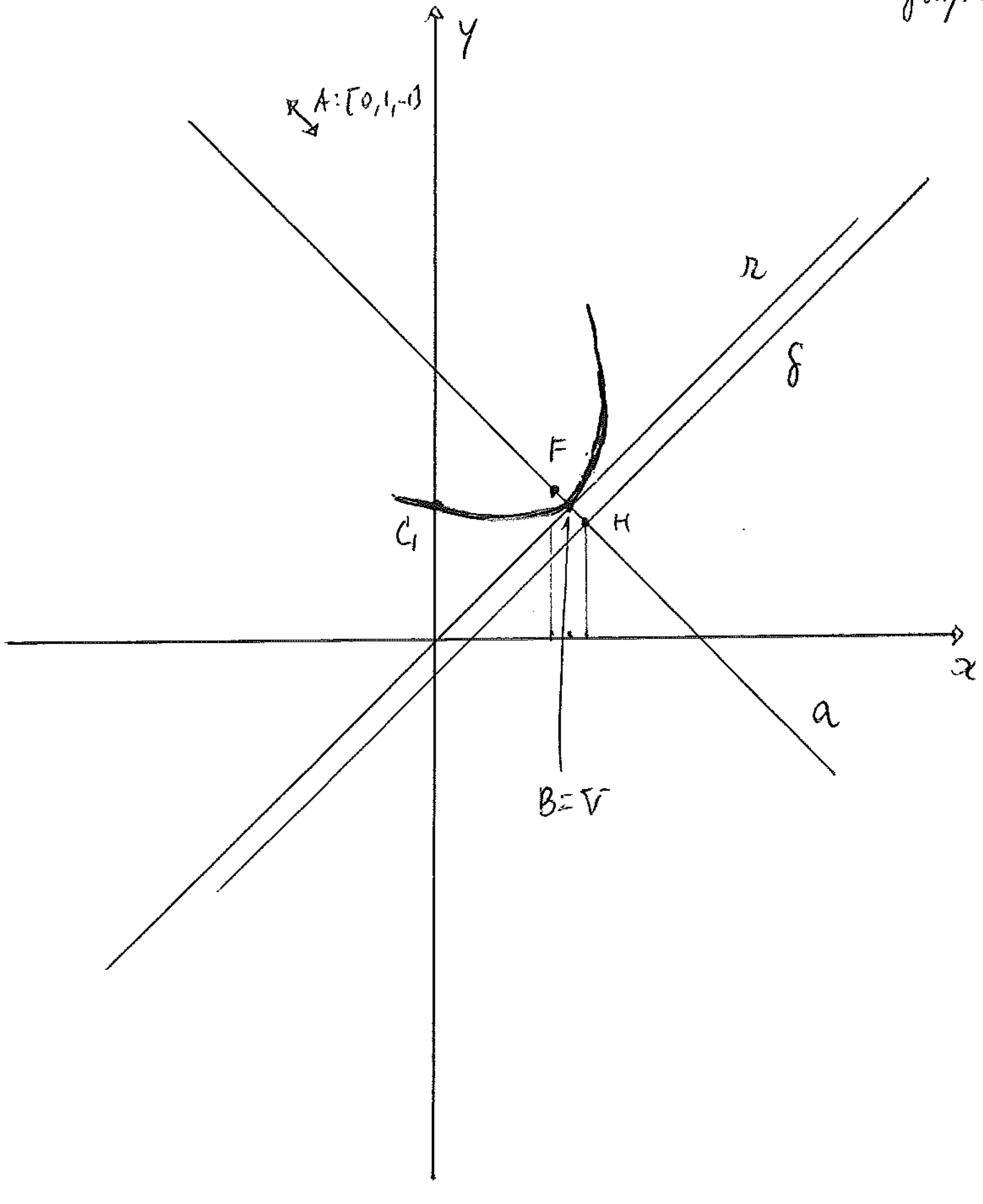
$$(x_0\ x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 8 - \frac{21}{8} - \frac{45}{8} \\ \underbrace{-3 + \frac{7}{4} + \frac{9}{4}}_{=1} \\ \underbrace{-5 + \frac{7}{4} + \frac{9}{4}}_{-1} \end{pmatrix} = 0$$

$$-\frac{1}{4}x_0 + x_1 - x_2 = 0$$

$$4x_1 - 4x_2 - x_0 = 0$$

$$4x - 4y - 1 = 0 \quad \checkmark$$

grafico



(3) 8/9/2009

$$r: \begin{cases} x+y+1=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x-y+1=0 \\ z=1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{cases} x+y+1=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \quad 2x+2=0 \quad x=-1 \quad \Rightarrow -1+y+1 = y = 0 \right)$$

r e s sono sghembe : ciò è evidente,

come pure il fatto che $d(r,s)=1$

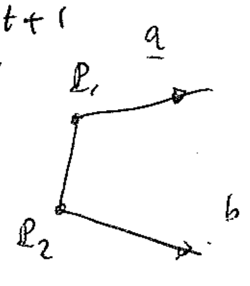
la perp. comune è // asse z passa per $P: (-1,0,0)$ $\Rightarrow$ è $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$

* la giacitura tu individuata è $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$

con $\underline{a}, \underline{b}$ direzioni di r e s

$$\underline{a} = (1,-1,0) \qquad \underline{b}: (1,1,0)$$

$$r: \begin{cases} x=t \\ y=-t-1 \\ z=0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x=t \\ y=t+1 \\ z=1 \end{cases}$$



Diamo comunque i dettagli

$P_1: (-1, 0, 0) \in r$

$P_2: (-1, 0, 1) \in s$

$$\overline{P_1P_2} = (0,0,1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ sono sghembe.

8/9/09

1'

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

Autovettore : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1+2 = \rho \\ a = 2\rho \\ 2b = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \rho &= 3 \\ a &= 6 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

$$p_c^A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 6 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda) \cdot \left(-\lambda \cdot (1-\lambda) - 6 \right) =$$

$$= \lambda \left[\lambda(1-\lambda) + 6 \right] = \lambda \left(-\lambda^2 + \lambda + 6 \right)$$

$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$

radici: $\lambda = 0$ $\qquad \lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} \begin{matrix} -2 \\ 3 \end{matrix}$

ok: somma $= +1$, prod $= -6$

autovalori : $\{ 0, -2, -3 \}$ distinti $\Rightarrow$

A è diagonalizzabile

autospazi $\quad V_{3}^{A} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ (chiaro)

$$V_{0}^{A} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{(ovvio!)}$$

$\|$

Ker A

V_{-2}^{A} :

$$\begin{pmatrix} \underbrace{1+2}_{3} & 1 & 0 \\ 6 & +2 & 0 \\ 0 & 0 & +2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$3x + y = 0 \qquad y = -3x$

$6x \cancel{+2y} = 0 \qquad \rightsquigarrow$ ex: $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$2z = 0 \Rightarrow z = 0$

$$V_{-2}^{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2'

8/9/09

nucleo e immagine di $A_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$

al variare di $a, b \in \mathbb{R}$

① $r(A_{a,b}) = 2$ se $b \neq 0$ $\Rightarrow \nu = 1$

oppure se $b = 0$ ma $a \neq 0$

② $r(A_{a,b}) = 1$ se $a = b = 0$.

$(\Rightarrow \nu = 2)$

① base di $\operatorname{Im} A_{a,b}$: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \right\rangle$ Poiché $\nu = 1$ (N+R)

e $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker A$, è $\ker A = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(si può vedere anche direttamente)

② $\operatorname{Im} A_{0,0} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\nu = 2$

si vede subito che $\ker A = \left\langle \overset{e_1 - e_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{e_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\rangle$

(anche ris. il sistema direttamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x + y = 0$

$x = x$
$y = -x$
$z = z$