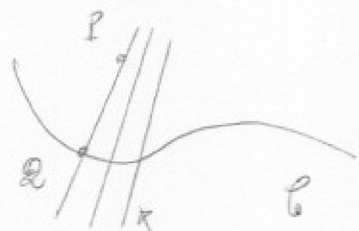
4 Superficie rigate

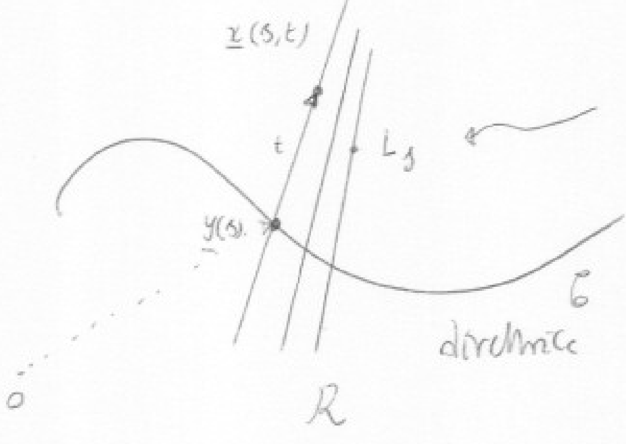
In modo informale, una rigata $\mathcal{R}$ è una superficie generata dal moto continuo di una retta nello spazio. Essa pertanto si ottiene assegnando una direttrice $\mathcal{C}: s \longmapsto \underline{y}(s) \in \mathbb{R}$ (liscia) (se utilizziamo la lunghezza d'arco come parametro, con s variabile in un intervallo opportuno $\mathcal{J}$ e una famiglia di direzioni $s \longmapsto \underline{z}(s) \in \mathbb{R}^3$, $\|\underline{z}(s)\| \equiv 1$. La superficie in questione viene allora descritta allora da:

$$(\blacklozenge) \qquad \underline{x}(s,t) = \underline{y}(s) + t\,\underline{z}(s) \qquad s \in \mathcal{J},\ t \in \mathbb{R} \ \text{(o intervallo)}, \quad \|\underline{z}\| = 1$$

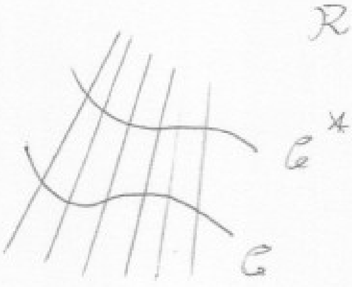
notazione "classica"

$P = Q + t\,\underline{R}$ $\quad$ $\underline{R}$ versore generico





regoli (o generatrici) della rigata



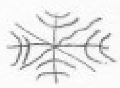
Si osservi che una rigata ammette infinite direttrici: è sufficiente considerare una qualsiasi curva che intersechi trasversalmente tutte le generatrici ed esattamente una volta

Nella rappresentazione $(\blacklozenge)$, t diviene l'ascissa curvilinea sul regolo L_s. Ciò è comodo nelle discussioni teoriche, tuttavia, in $(\blacklozenge)$ possono usarsi parametri qualsiasi, e $\underline{z}$ (o $\underline{R}$) non necessariamente un versore.

osserviamo subito che i regoli forniscono direzioni asintotiche della superficie ($\underline{v} \in T_P \Sigma$, $\|\underline{v}\| = 1$, fornisce una direzione asintotica (in P) se

$$\mathrm{II}_P(\underline{v}) = 0 = \langle \underline{v}, \underset{-dN}{\underset{\parallel}{S}}\, \underline{v} \rangle$$

) : questo perché $\underset{\text{curvatura normale}}{k_n}$ è nulla lungo un regolo. Da ciò segue subito che $\underset{\text{curvatura gaussiana}}{K \leq 0}$ (II è indefinita o semidefinita)

ad esempio, se $k_1 < 0 < k_2$ si hanno gli asintoti dell'indicatrice di Dupin 

R è detta sviluppabile se il piano tangente non varia lungo le generatrici. Per una tale rigata, $K \equiv 0$, poiché allora $\underline{N}$ non varia lungo una generatrice, e l'immagine dell'applicazione di Gauss è una curva.

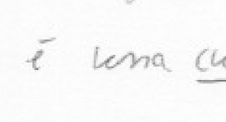
Diamo una caratterizzazione analitica della sviluppabilità.

$$P(s,t) = \underline{P} = \overset{Q(s)}{Q} + t\, \overset{R(s)}{\underline{R}} \qquad \underset{\frac{\partial P}{\partial s}}{\underset{\equiv}{P_s}} = Q_s + t\, R_s$$

$$P_t = \underline{R} \qquad \text{Piano tangente in } P.$$

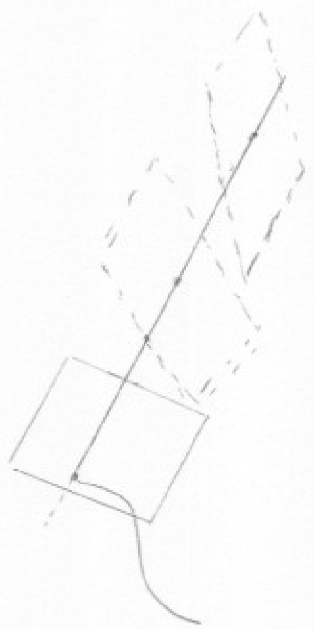
$$\langle U - P, \underbrace{(Q_s + t R_s) \times \underline{R}}_{Q_s \times \underline{R} \,+\, t\, R_s \times \underline{R}} \rangle = 0$$

punto generico del piano tangente



teor. di Charles

il piano tangente risulta indipendente da t,
per s fissato se e solo se i vettori
Q_s , $\underline{R}_s$ e $\underline{R}$ sono
linearmente <u>dipendenti</u>: infatti



Se $t=0$, il piano tangente è generato da
Q_s e $\underline{R}$ (che non dipendono da t)
(se l. ind.)
Il piano tangente è invariabile lungo il regolo
se e solo se $\underline{R}_s$ = c. l. di $\underline{Q}_s$ e $\underline{R}$.
In definitiva deve aversi, per la sviluppabilità,

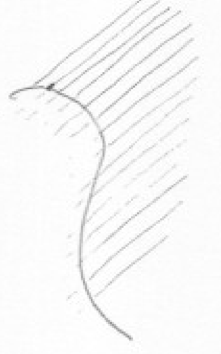
$$\det \begin{vmatrix} Q_s & \underline{R}_s & \underline{R} \end{vmatrix} = 0$$

$\langle \underline{y}' \times \underline{z}', \underline{z} \rangle = 0$

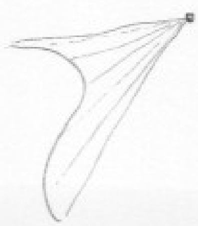
ovvero
$$\begin{vmatrix} \underline{y}' & \underline{z}' & \underline{z} \end{vmatrix} = 0 \qquad ' = \frac{d}{ds}$$

★ <u>Chasles</u>: la generatrice e il fascio di piani tangenti per i suoi pti sono in corrispondenza <u>proiettiva</u>

Se $\underline{R}_s \equiv 0 \Rightarrow \underline{R} = \underline{R}(s) = \underline{R}_0$ costante,
e la rigata (sviluppabile) è detta <u>cilindrica</u>
(o <u>cilindro</u> <u>generalizzato</u>)



Se le generatrici passano per uno stesso punto si ha un cono generalizzato



Se $\underline{z} = \underline{t} = y'$ si ha
una <u>superficie</u> <u>tangente</u> (a $\mathscr{C}$) τ
(ovviamente sviluppabile), e
$\mathscr{C}$ ne diviene lo <u>spigolo</u> <u>di</u> <u>regresso</u>

per avere una sup. regolare → $\underline{x}_s = \underline{y}' + t\,\underline{y}''$

$\underline{x}_t = \underline{y}'$ l. ind $\Leftrightarrow$ $t \neq 0$ e $\underline{y}'' \neq \underline{0}$

($\Rightarrow k \neq 0$)
↑(curvatura)

* cosa accade per $t = 0$?

utilizzando il triedro di Frénet e la relativa rappresentazione canonica di $\mathcal{C}$: $\underline{y} = y(s)$ in P_0 $(s=0)$

$$\begin{cases} y_1 = s - \dfrac{k_0^2}{6} s^3 + \dots \\ y_2 = \dfrac{k_0}{2} s^2 + \dfrac{k_0'}{6} s^3 + \dots \\ y_3 = -\dfrac{k_0 \tau_0}{6} s^3 + \dots \end{cases}$$

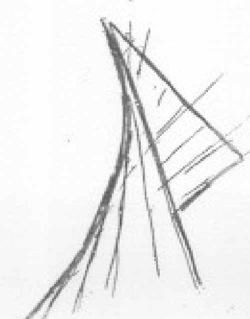
sicché, per $\underline{x} = \underline{x}(s,t) = \underline{y}(s) + t\,\underline{t}(s)$

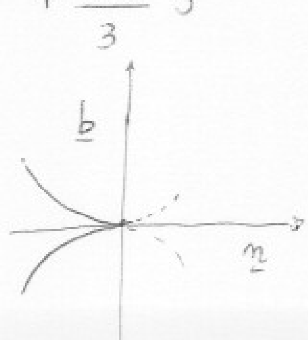
$$\begin{cases} x_1 = s - \dfrac{k_0^2}{6} s^3 \dots + t\left(1 - \dfrac{k_0^2}{2} s^2 + \dots\right) \\ x_2 = \dfrac{k_0 s^2}{2} + \dfrac{k_0' s^3}{6} + \dots\; t\left(k_0 s + \dfrac{k_0'}{2} s^2 + \dots\right) \\ x_3 = -\dfrac{k_0 \tau_0}{6} s^3 + \dots\; t\left(-\dfrac{k_0 \tau_0}{2} s^2 + \dots\right) \end{cases}$$

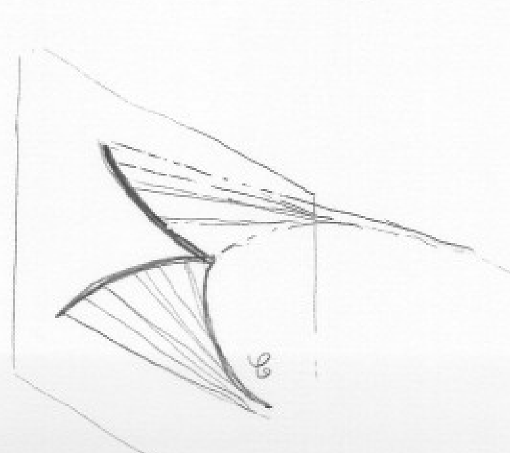
il piano normale ha eq. $x_1 = 0$

$\Rightarrow$ $t = \dots = -s - \dfrac{k_0^2}{3} s^3$ e, sostituendo nelle altre due espressioni si ha, per la curva intersezione

$$\begin{cases} x_2 = -\dfrac{k_0 s^2}{2} \\ x_3 = +\dfrac{k_0 \tau_0}{3} s^3 \end{cases}$$ → singolarità cuspidale







** Classifichiamo le rigate sviluppabili:

partiamo dalla relazione, valida in un opportuno intervallo

$$c(s)\,\dot{\underline{y}}(s) + d(s)\,\underline{z}(s) + e(s)\,\underline{z}'(s) = \underline{0}$$

(1) Se $c(s) \equiv 0$, è $d\,\underline{z} + e\,\underline{z}' = \underline{0}$ (in ogni pto, almeno una delle f. d, e, è $\neq 0$)

da $\|\underline{z}\| = 1$, si ha $\langle \underline{z}, \underline{z}' \rangle = 0 \Rightarrow d = 0$

$\Rightarrow \underline{z}' = 0 \Rightarrow \underline{z} = \underline{z}_0$ (cost.)

in tale situazione, si ha una porzione di piano o di un cilindro

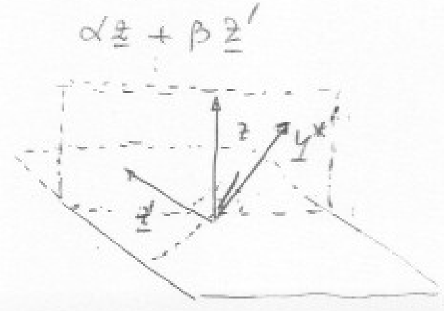
(2) Se $c(s) \neq 0$ $\forall s$ in un intervallo,

$$\underline{y}' = \alpha\,\underline{z} + \beta\,\underline{z}' \qquad \left(\alpha = -\frac{d}{c}, \ \beta = -\frac{e}{c}\right)$$

poniamo $\underline{y} = \underline{y}^* + \beta\,\underline{z}$ $\qquad (\underline{y}^* = \underline{y} - \beta\,\underline{z})$

deriviamo rispetto ad s: [nota: $\langle \underline{y} - \underline{y}^*, \underline{z}' \rangle = \beta \langle \underline{z}, \underline{z}' \rangle = 0$

$$(\underline{y}^*)' = \underbrace{\underline{y}'}_{\alpha\underline{z} + \beta\underline{z}'} - \beta\,\underline{z}' - \beta'\,\underline{z} = \underbrace{(\alpha - \beta')}_{A}\,\underline{z} \Rightarrow \langle (\underline{y}^*)', \underline{z}' \rangle = 0$$



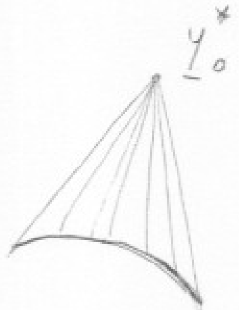
$\underline{y}^* = \underline{y}^*(s)$:

** linea di stringimento di R

punti di tale linea: punti centrali di R

$2'$. $A = 0$ $\quad \underline{y}^{*\prime} = \underline{0} \Rightarrow \underline{y}^* = \underline{y}_0^*$ linea di stringimento ridotta ad un punto

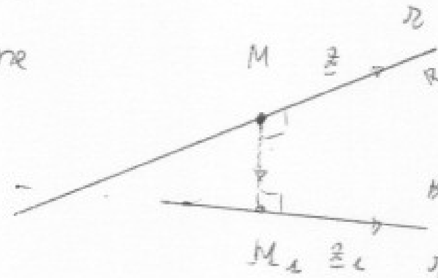
$\Rightarrow \quad \underline{x} = \underline{y}_0^* + (t+\beta)\underline{z} \quad \Rightarrow$ cono o piano



$2''$. Se $A \neq 0$, è $\underline{z} = \dfrac{\underline{y}^{*\prime}}{A} \Rightarrow$

$$\underline{x} = \underline{y} + t\,\underline{z} = \underline{y}^* + \underset{\substack{\| \\ \frac{t+\beta}{A}}}{v}\,\underline{y}^{*\prime} \Rightarrow \text{superficie tangente}$$

★ La linea di stringimento è definita in generale dalla condizione $\langle \underline{y}^{*\prime}, \underline{z}' \rangle = 0$. Interpretiamo geometricamente tale condizione



generatrici (in generale sghembe)

MM_1 : perpendicolare comune (retta di minima distanza)

Se ora si prendono due generatrici infinitamente prossime M tenderà ad una posizione limite (punto centrale della generatrice)

★ il luogo di tali punti è la linea di stringimento $\underline{y}^* = \underline{y}^*(t)$

$\rightarrow$ da $MM_1 \perp \underline{z}$, $\perp \underline{z}_1$

si trova $\dfrac{MM_1}{\Delta t} \perp \dfrac{\underline{z} - \underline{z}_1}{\Delta t}$ e, al limite (per $\Delta t \to 0$, t par. qualsiasi)

$$\langle \underline{y}^{*\prime}, \underline{z}' \rangle = 0$$

da quanto visto segue che, in cond. generiche la linea di stringimento è una geodetica

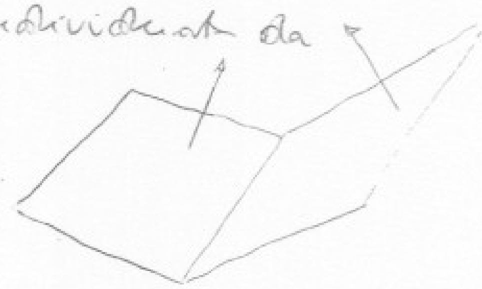
27 L'inviluppo dei piani tangenti ad una curva (non asintotica $^+$) su una superficie regolare è una rigata sviluppabile [esempi: proiezioni cartografiche..]

$$\underline{r} = \underline{r}(s,v) = \underline{\alpha}(s) + v\,\frac{\underline{N}(s)\times\underline{N}'(s)}{\|\underline{N}'(s)\|} \quad (\diamond)$$

$$\|\underline{N}'(s)\| \neq \underline{0}$$

significato geometrico:

i piani tangenti $T_{\underline{\alpha}(s)}\Sigma$ e $T_{\underline{\alpha}(s+\Delta s)}\Sigma$ si intersecano lungo una retta la cui direzione è individuata da

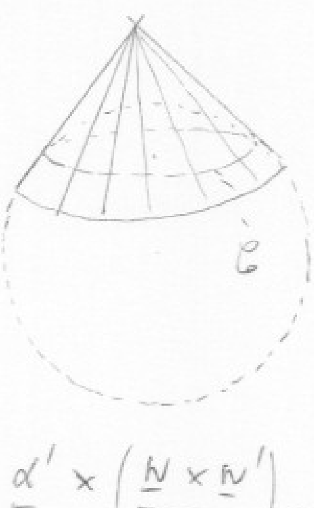


$$(*) \quad \frac{\underline{N}(s)\times\underline{N}(s+\Delta s)}{\Delta s}$$

che, al limite per $\Delta s \to 0$,

in virtù di $(*) = \underline{N}(s)\times\left[\dfrac{\underline{N}(s+\Delta s)-\underline{N}(s)}{\Delta s}\right]$,

conduce subito a $(\diamond)$.



Per costruzione la superficie è sviluppabile poiché il piano tangente non varia lungo i regoli.

inoltre

$$\underline{r}_u \times \underline{r}_v = \underline{\alpha}'\times\left(\frac{\underline{N}\times\underline{N}'}{\|\underline{N}'\|}\right) = \frac{\langle \underline{N}',\underline{\alpha}'\rangle}{\|\underline{N}'\|} = -\frac{\langle \underline{N},\underline{\alpha}''\rangle}{\|\underline{N}'\|}\underline{N}$$

+ per ipotesi $0 \neq k_n$

$$= -\frac{k_n\underline{N}}{\|\underline{N}'\|} \neq \underline{0}$$ su $\mathscr{C}$ (e dunque in un intorno opportuno) (regolarità)

$(\underline{u}\times\underline{v})\times\underline{w} = \langle \underline{u},\underline{w}\rangle\underline{v} - \langle \underline{v},\underline{w}\rangle\underline{u}$ richiamo

XII-26

Teorema Sia Σ una superficie (parametrica) piatta ($K=0$) priva di pti planari (i.e. in cui $k_1 = k_2 = 0$). Allora Σ è una superficie (rigata) sviluppabile (i.e. il piano tangente è costante lungo i regoli: viceversa, una tale superficie ha necessariamente $K=0$, poiché l'immagine della sua mappa di Gauss è una curva

(a sua volta, una tale superficie è localmente un cono, un cilindro, o una superficie tangente v. oltre

Dim. Poniamo $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$.

Parametrizziamo tramite le linee di curvatura. Perciò $F = f = 0$

da $S(\underline{r}_u) = -\underline{N}_u = 0$ segue che $\underline{N}$ è costante lungo le curve C_v (v cost.)

(in particolare, ma ciò è ovvio a priori, l'immagine dell'applicazione di Gauss è di fatto una curva).

Dimostriamo che queste curve sono rette.

È pertanto $e = \mathrm{II}(\underline{r}_u) = 0$

$g \neq 0$ (poiché $k_2 \neq 0$)

Usando la prima equazione di C-M si ha

$$0 = \underbrace{e_v}_{0} - \underbrace{f_u}_{0} = \underbrace{e}_{0}\Gamma^1_{12} + \underbrace{f}_{0}(\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{22}) - g\Gamma^2_{11} = -g\Gamma^2_{11}$$

$$\Rightarrow \Gamma^2_{11} = 0 \Rightarrow \underline{r}_{uu} = \Gamma^1_{11}\underline{r}_u + \ldots 0$$

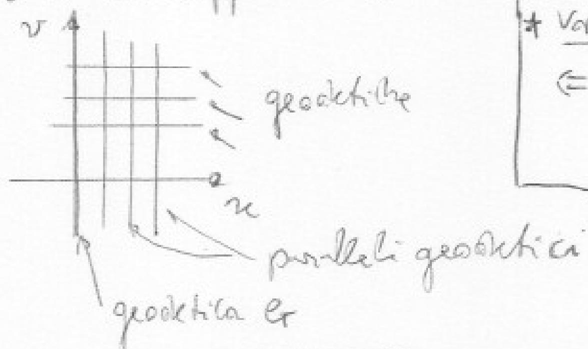
$$\Rightarrow \underline{r}_{uu} \parallel \underline{r}_u \Rightarrow \text{le curve "}u\text{" sono rette}$$

Teorema Una (porzione) di superficie (liscia) Σ è isometrica ad una porzione di <u>piano</u> se e solo se è <u>sviluppabile</u>

Dim. ($\Rightarrow$). Se Σ è isometrica ad una porzione di piano, deve aversi, in virtù del Theorema Egregium, $K=0$. Ma ciò implica che Σ è <u>sviluppabile</u>, (modificando opportunamente il ragionamento del teorema precedente).

($\Leftarrow$) Se Σ è sviluppabile, introduciamo coordinate geodetiche:

* Variante: Σ è sviluppabile $\Leftrightarrow K \equiv 0 \Leftrightarrow \Sigma$ è loc. isometrica ad un piano (Minding)



$$\Rightarrow \boxed{ds^2 = du^2 + g_{22}\, dv^2}$$

ma se v = l. d'arco su Γ

è $g_{22}(0,v) = 1 \quad (*)$

Ma, poiché Γ è una geodetica

$$0 = (k_g)_{u=0} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{g_{11}}}_{=1}} \frac{\partial}{\partial u}\left(\log\sqrt{g_{22}}\right) \Rightarrow$$

curvatura geodetica

$$(**) \quad \left.\frac{\partial g_{22}}{\partial u}\right|_{u=0} = 0$$

Ma, dato che $K=0$, è $0 = K = -\dfrac{1}{\sqrt{g_{22}}}\dfrac{\partial^2\sqrt{g_{22}}}{\partial u^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\sqrt{g_{22}}}{\partial u^2} = 0$$

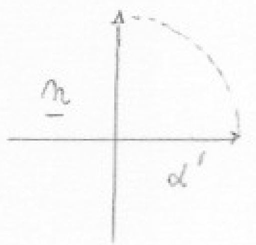
$\Rightarrow \sqrt{g_{22}} = c_1(v)\,u + c_2(v)$; da $(*)$ è $c_2 = 1$ e da $(**)$ è $c_1 = 0$ $\Rightarrow \boxed{ds^2 = du^2 + dv^2}$ e si conclude.

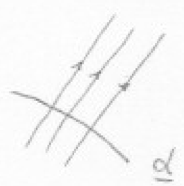
XII-28

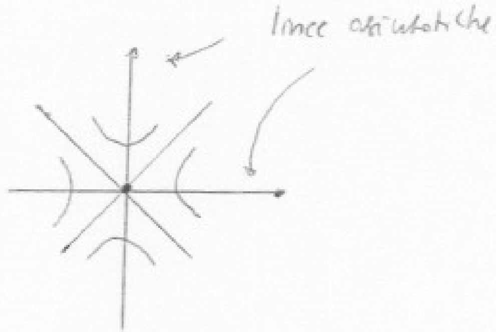
✱ L'unica superficie rigata$^{(+)}$ minima è l'elicoide :

(+) non piana

$$\underline{x}(s,t) = \underline{\alpha}(s) + t\,\underline{n}(s)$$







$k_n = 0$ su una linea asintotica

$\Rightarrow \quad \underline{b} = \underline{N}$ (piano osculatore = piano tangente su $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(s)$)

per una sup. minima $k_1 + k_2 = 0$

$\Rightarrow$ ind. di Dupin iperboli equilatere

✱ linee asintotiche ortogonali

rigati individuati dalle normali principali

$$\underline{x}_s = \overset{\underline{t}}{\underline{\alpha}'} + t\,\underline{n}' \qquad \underline{x}_{ss} = \underline{\alpha}'' + t\,\underline{n}''$$

$$\underline{x}_t = \underline{n} \qquad \underline{x}_{st} = \underline{n}' = \underline{x}_{ts}$$

$$\underline{x}_{tt} = 0$$

se $k(\underline{\alpha}) \neq 0$, è

curvatura di $\underline{\alpha}$

($\underline{n}$ è definito...)

$$e = \langle \underline{x}_{ss}, \overset{\underline{b}}{\underline{N}} \rangle = 0$$

$$g = \langle \underline{x}_{tt}, \underset{\underline{b}}{\underline{N}} \rangle = 0$$

$$f = \langle \underline{n}', \underline{b} \rangle = -\tau$$

$e = 0$ implica, $\forall t$ $\quad \langle k\,\underline{n} + t\,\underline{n}'', \underline{b} \rangle = 0 \Rightarrow$

$\langle \underline{n}'', \underline{b} \rangle = 0 \quad$ ma $0 = \langle \underline{n}'', \underline{b} \rangle = \langle \underline{n}', \underline{b} \rangle' - \langle \underline{n}', \underline{b}' \rangle$

$$= \langle -k\,\underline{t} - \tau\,\underline{b}, \underline{b} \rangle' - \underbrace{\langle \underline{n}', \tau\,\underline{n} \rangle}_{0} = -\tau'$$

$$\Rightarrow \tau = \tau(\underline{\alpha}) = \text{cost}$$

Inoltre $\langle \underline{x}_s, \underline{x}_s \rangle = E = 1 + t^2 \|\underline{n}'\|^2$

$= 1 + t^2(k^2+\tau^2) - 2kt$

$x_s = \underline{t} + t\,\underline{n}'$

$= \underline{t} + t(-k\underline{t} - \tau\underline{b})$

$= (1-kt)\,\underline{t} - \tau t\,\underline{b}$

$= (t=0) = 1$ su $\underline{\alpha}$

$(1-kt)^2 + \tau^2 t^2$
$= 1 - 2kt + k^2t^2 + \tau^2 t^2$

$\langle \underline{x}_t, \underline{x}_t \rangle = G = 1 \qquad F = \langle \underline{x}_s, \underline{x}_t \rangle = 0$

vale in generale per una curva asintotica

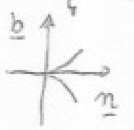
Si ha perciò, su $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(s)$

$$\boxed{K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\tau^2}$$

** (Beltrami-Enneper)

stessa figura lungo $\underline{\alpha}$ $\Rightarrow k' = 0 \Rightarrow K$ cost.

$= -k_1^2 = -k_2^2$. k curvature principali costanti. Da $\tau = \text{cost}$ (su α) e dalla costanza dell' indicatrice di Dupin (cf. anche il teorema di ... $k \neq 0$)



segue allora $k(\alpha) = \text{cost}$ su $\underline{\alpha} \Rightarrow \underline{\alpha}$ è un'elica circolare

e pertanto Σ è una porzione di elicoide.

---

variante:

oppure, utilizziamo $K = -\dfrac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\dfrac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\dfrac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u \right)$

Qui $u = s$, $v = t$ $\qquad E = 1 - 2kt + (k^2+\tau^2)t^2 \qquad G = 1$, $F = 0$

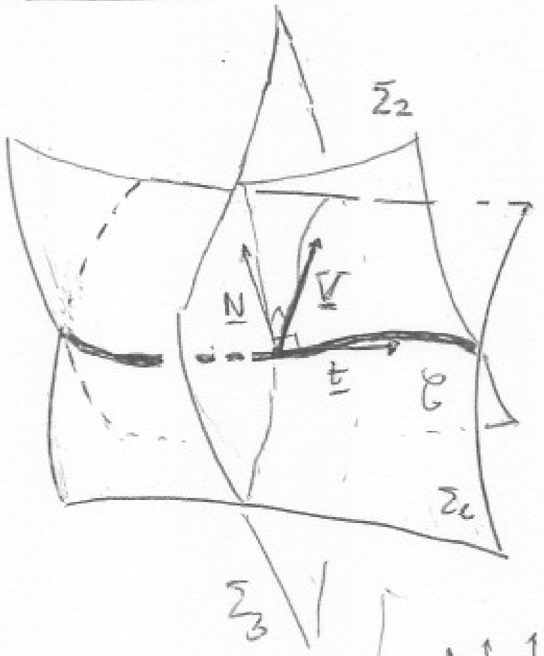
$$K = -\frac{1}{2\sqrt{E}}\left(\frac{E_t}{\sqrt{E}}\right)_t = -\frac{1}{2\sqrt{E}}\left(+2\sqrt{E}\right)_{tt} = -\frac{1}{\sqrt{E}}(\sqrt{E})_{tt}$$

in $t=0$ è $K = -(\sqrt{E})_{tt}\Big|_{t=0} =$ (direttamente o tramite una serie binomiale)

$K = -\tau^2$

★ **Teorema** (Dupin)

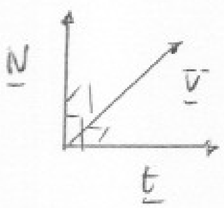
Due superfici appartenenti ad un sistema triplamente ortogonale si incontrano lungo linee di curvatura

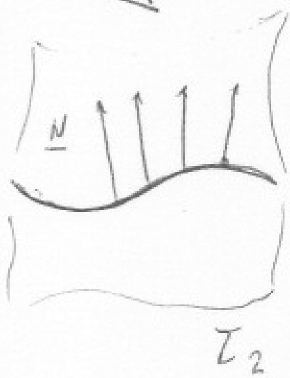


Dim. Con riferimento alla figura, consideriamo la variazione di $\underline{N}$ lungo $\mathscr{C}$ ($\underline{N}$ v. normale di Σ_1). Esso rimane tangente a Σ_2, sicché

$$\langle \underline{N}', \underline{V} \rangle = 0 \text{ lungo } \mathscr{C}$$

($\underline{V}$ v. normale di Σ_2)

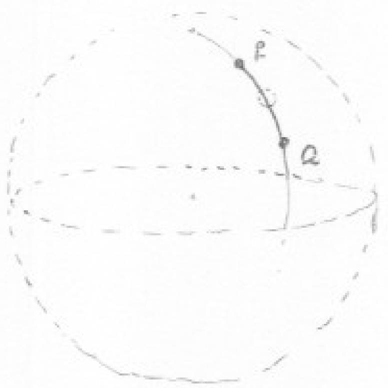


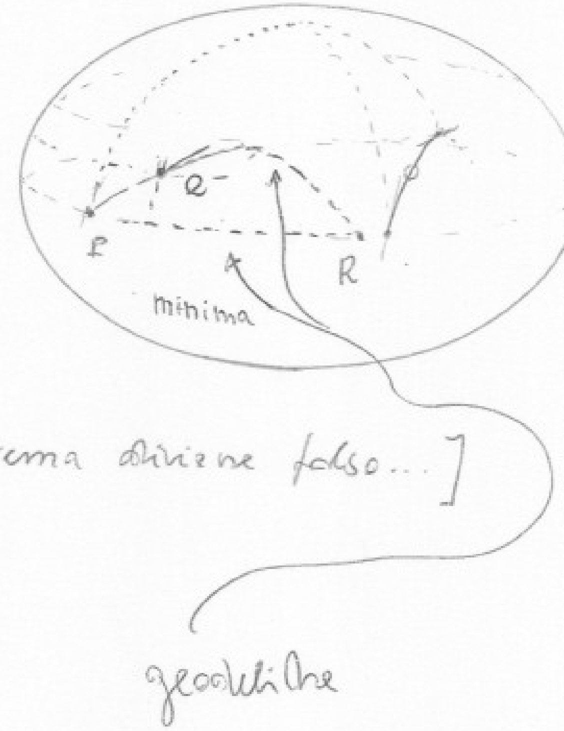


Ma allora, da $\langle \underline{N}', \underline{V} \rangle = 0$ e da $\langle \underline{N}', \underline{N} \rangle = 0$ si ha subito $\underline{N}' \parallel \underline{t}$, e concludiamo in virtù del teorema di Rodrigues. □

★★ Teorema di Hopf-Rinow

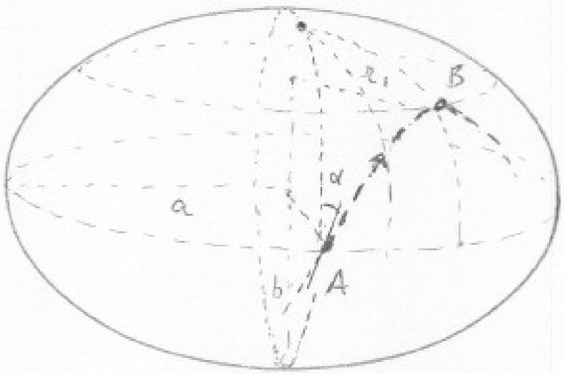
Su una superficie completa (i.e. ogni geodetica si estende indefinitamente (eventualmente percorrendo uno stesso sostegno), dati due pti P e Q, essi sono sempre congiunti da una geodetica di lunghezza minima





[Se rimuovo un pto il teorema diviene falso...]

★ Geodetiche sull'ellissoide di rotazione
(considerazioni qualitative)

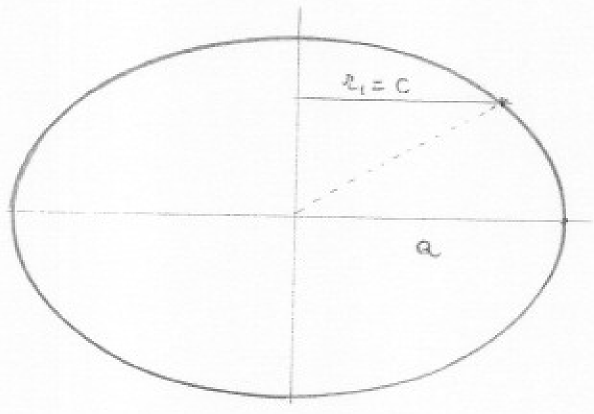


★ Clairaut: $r \sin\alpha = C$ per una geodetica
↑
raggio del parallelo

Sia $r_0 = a$ $a \sin\alpha = C$ $|C| \leq a$

in B: $\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{2} = +1$

$C = r_1$

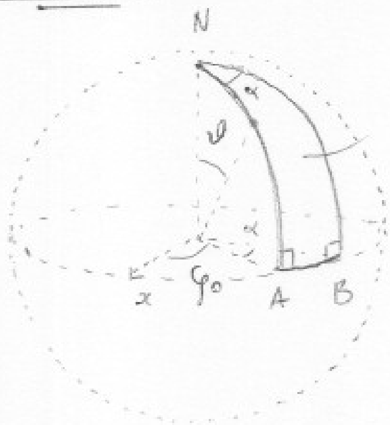


la geodetica uscente da A,
di azimut α,
diviene tangente in B
(sul parallelo "nord" di
raggio $r_1 = a \sin\alpha$.

<II-33

Nelle applicazioni A e B sono fissi. L'azimut varia punto per punto in accordo con la relazione di Clairaut.
. Una rotta lossodromica (angolo costante) non è geodetica.
$\sin\alpha = \frac{r_1}{a}$ dà la direzione della geodetica di lunghezza minima congiungente A e B. (Cf. Hopf–Rinow)

★ Esercizi vari



$\tilde{S}$ ★ Calcolare in più modi l'area del semispicchio $\tilde{S} \subset S^2$ di ampiezza α

Sol. (1) Diretta. $A(\tilde{S}) = \iint_{\tilde{S}} \sqrt{EG-F^2}\, d\vartheta\, d\varphi$ (coord. sferiche)

dominio nello spazio dei parametri corrispondente a $\tilde{S}$

$F = 0 \qquad \sqrt{EG} = \sin\vartheta$

$$A(\tilde{S}) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\alpha} \left(\int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \, d\vartheta \right) d\varphi = \alpha \cdot (-\cos\vartheta)\Big|_0^{\pi/2} = \alpha$$

In particolare, se $\tilde{S}$ è una semisfera, $A(\tilde{S}) = 2\pi$.

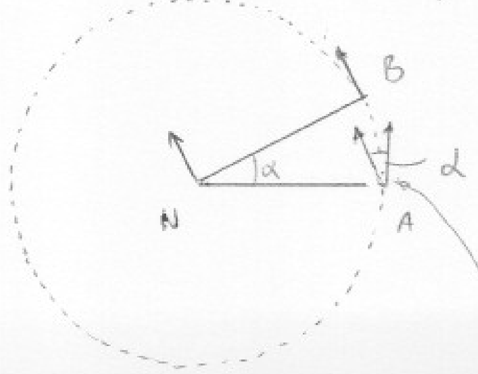
(2) Il triangolo sferico ABN è geodetico.

Dalla formula di Gauss $\alpha + \beta + \gamma - \pi = \iint_{\Omega} K\, d\sigma$

(e dal fatto che $K_{S^2} = +1$)

Si trae $\alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi = A(\tilde{S}) \implies A(\tilde{S}) = \alpha$

(3) Proiezione stereografica dal polo sud



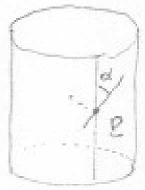
(è conforme ⇒ conserva gli angoli)

trasporto parallelo lungo i lati di ABN

Dal teorema di Levi-Civita (e da $K_{S^2} = +1$) è ancora

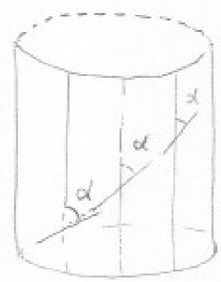
$A(\tilde{S}) = \alpha$

* Geodetiche sul cilindro circolare retto

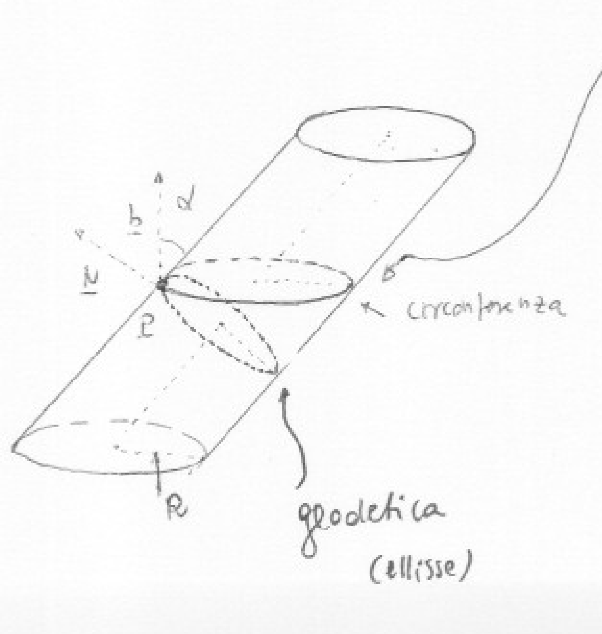


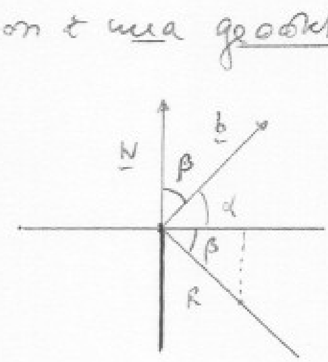
Ci si convince immediatamente che i meridiani (e ciò è vero sempre nelle sup. di rotazione) e i paralleli sono geodetiche. Se una geodetica uscente da un punto generico P sulla superficie forma col meridiano passante per quel punto un angolo α (v. figura), in virtù del teorema di Clairaut, essa interseca tutti i meridiani formando con quelli lo stesso angolo α.

Da ciò si conclude che deve essere un'elica.



Cilindro circolare obliquo





$$k_g(P) = \frac{1}{R}\cos\beta = \frac{1}{R}\sin\alpha$$

★ Dimostrare che una triangolazione qualsiasi della sfera possiede un numero pari di triangoli.

Sol. $$V - E + F = 2 \quad \text{(Euler-Poincaré)}.$$

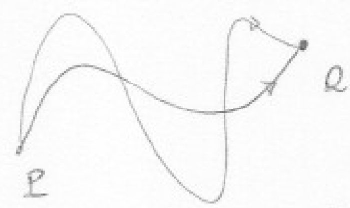
$$n_0 - n_1 + n_2 = 2 \qquad n_1 = \frac{3n_2}{2}$$

$$n_0 - \frac{3n_2}{2} + n_2 = 2$$

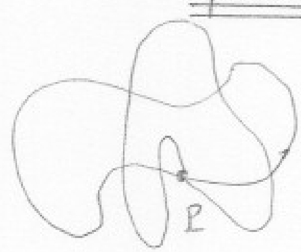
$$n_0 - \frac{n_2}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad n_2 = 2(n_0 - 2)$$

★ Dimostrare che se su Σ il trasporto parallelo tra due pti qualsiasi non dipende dalla curva che li congiunge, allora $K_\Sigma \equiv 0$.

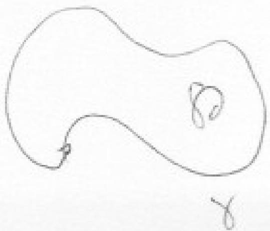
Sol. (schizzo di dim)



★ la proprietà enunciata equivale alla seguente: il trasporto parallelo lungo un circuito chiuso è banale (è l'identità).



Per il teorema di Gauss-Bonnet si avrebbe $\iint_\Omega K \, d\sigma = 0$



$\forall \gamma$ (e dunque $\forall \Omega$, $\partial\Omega = \gamma$).
Se $K(P_0) \neq 0$, si avrebbe, per continuità $K(P) \neq 0$ in un intorno di P_0, ed esisterebbe Ω tale che $\iint_\Omega K \, d\sigma \neq 0$, il che è assurdo.

* Esiste una curva (biregolare) $\mathscr{C}$ tale che $\kappa \equiv 0$ ma $\tau \neq 0$?

Sol. $\kappa \equiv 0 \Rightarrow \underline{r}'' \equiv 0$ $\quad \left(' = \frac{d}{ds} \right)$

$\Rightarrow \underline{r} = \underline{r}_0 + s\,\underline{t}_0$, $\underline{r}_0, \underline{t}_0$ costanti, $\|\underline{t}_0\| = 1$,

i.e. $\mathscr{C}$ è una retta. Ovviamente $\tau \equiv 0$.

<u>Non c'è contraddizione</u> con il teorema fondamentale perchè in esso si richiede $\kappa > 0$ (curve <u>biregolari</u>)

☆ Teorema sia $f : \underset{\mathbb{R}^3}{\overset{\cap}{\mathcal{U}}} \to \mathbb{R}$ differenziabile

e $a \in f(\bar{U})$ un valore regolare di f

[vale a dire, se x_0 è tale che $f(x_0) = a$,

è $df|_{x_0}$ suriettivo (i.e. rango max $= 1$)]

Allora $f^{-1}(a)$ è una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$

"La superficie di livello di un valore regolare è regolare"

Dim. Sia $p = (x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(a)$.

Per fissare le idee, supponiamo che $f_z(p) \neq 0$

sia $F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$

$$dF_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix} \qquad \det(dF_p) = f_z \neq 0$$

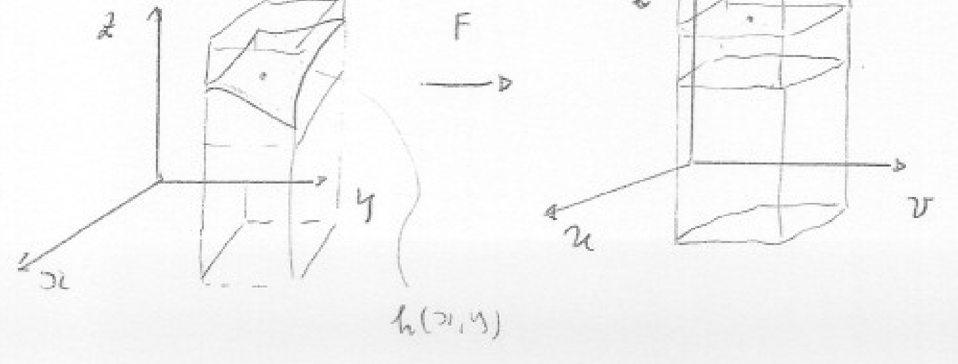
Per il teorema della funzione inversa

$\exists$ intorni $V \ni p$ e $W \ni F(p)$ tali che

$F : V \to W$ è invertibile e

$F^{-1} : W \to V$ è differenziabile

i.e
$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = g(u, v, t) \end{cases} \qquad (u, v, t) \in W$$



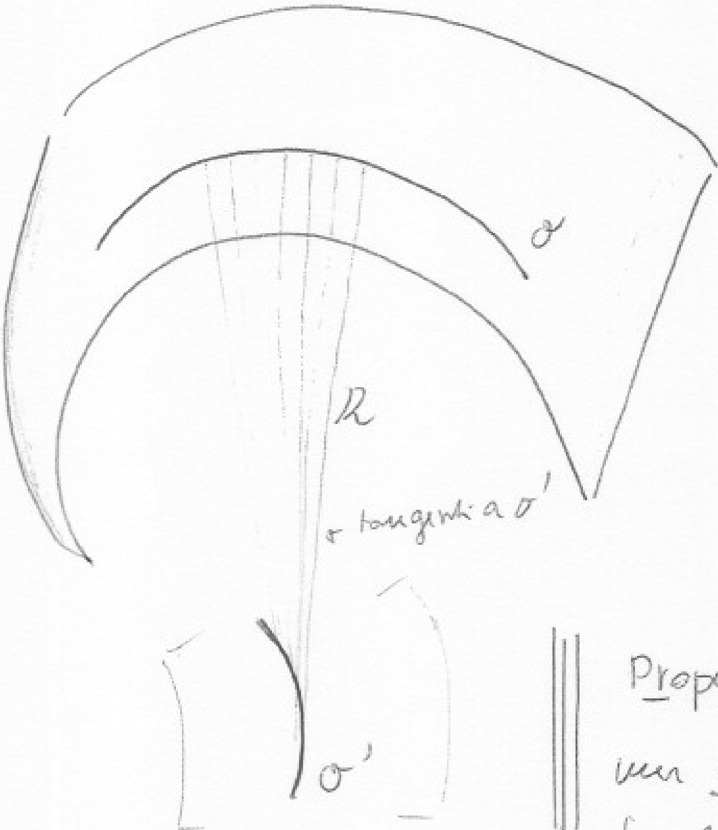
$z = g(u, v, a)$
$\equiv h(x, y)$

$$F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u,v,t) \mid t = a\}$$

è un intorno coordinato di p [un piano è una superficie regolare]

In virtù dell'arbitrarietà di $p \in f^{-1}(a)$, si conclude che $f^{-1}(a)$ è una superficie regolare

* Superficie focali



σ : linea di curvatura

σ' : evoluta di σ

Proposizione: σ' è una geodetica della superficie focale $\mathcal{R}$ (normali a σ)

Dim. La rigata $\mathcal{R}$ costituita dalle normali a σ è sviluppabile. $\mathcal{R}$ è isometrica ad una regione piana $\tilde{\mathcal{R}}$ loc. concava. La curva

$\tilde{\sigma}'$ è una geodetica (bordo, locale) di $\tilde{\mathcal{R}}$)

Pertanto σ' è una geodetica di $\mathcal{R}$ (localmente).

** geodetiche sull'ellissoide triassiale
(Jacobi)

(Cenno)

sono parte di un sistema triplamente ortogonale
(ellissoidi, ip. ad una falda, ip. a due falde ...)

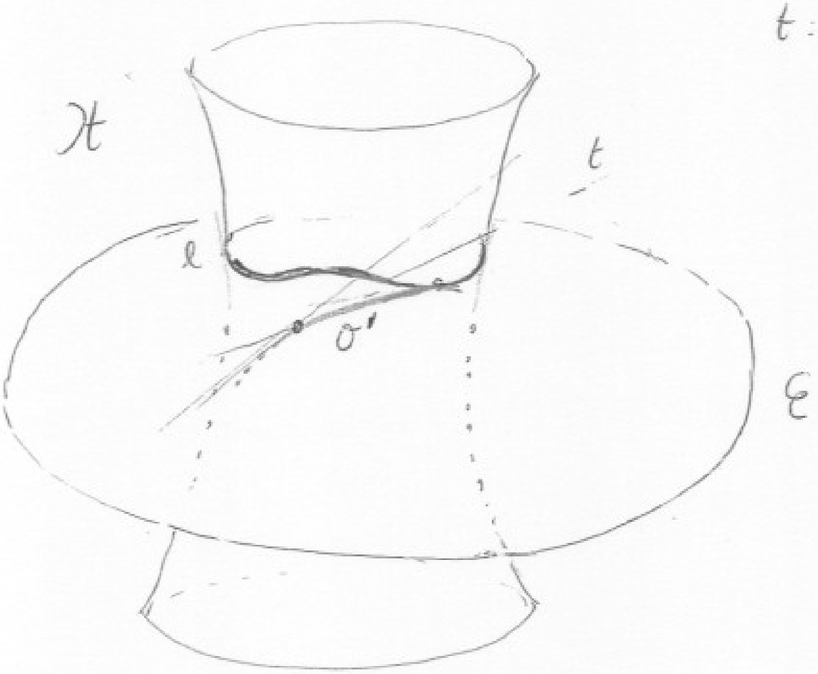
$\mathcal{E}$ $\mathcal{H}$

ellissoide triassiale — iperboloide ad una falda

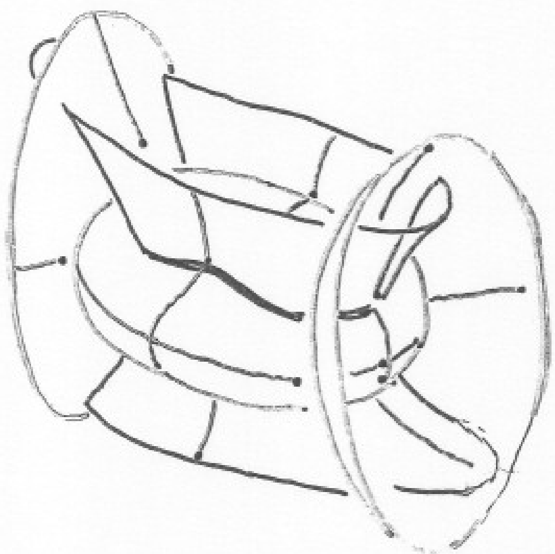
confocali

l: linea di curvatura

t: tangente ad $\mathcal{E}$ e ad $\mathcal{H}$



$\mathcal{H}$ ed $\mathcal{E}$ si possono vedere come le due falde della superficie focale di una terza superficie. Le tangenti comuni ad $\mathcal{H}$ ed $\mathcal{E}$ sono le normali a questa superficie. Per quanto visto precedentemente, O' è una geodetica (v. pag. precedente).



XII - 42

Altri esercizi

◇ Dimostriamo, per via sintetica, che meridiani e paralleli (su una sup. di rotazione) sono linee di curvatura

★ Meridiani:

da $\|\underline{N}\| = 1$

e dal fatto che

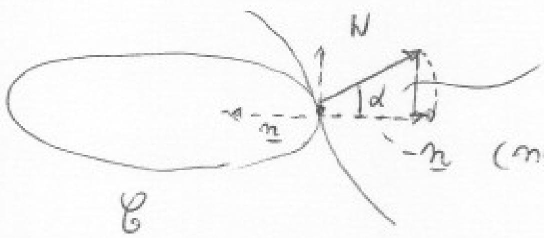
$\underline{N} \parallel \pi$,

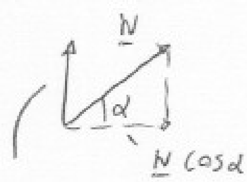
segue subito che, sul meridiano $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(s)$

$\underline{N}' \parallel \underline{\alpha}'$

e si conclude in base al teor. di Rodrigues.

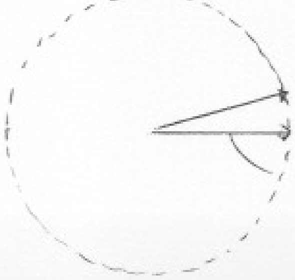
★ paralleli





Lungo un parallelo $\mathscr{C}$, $\quad \underline{N}' \parallel \underline{\beta}'$

$\underline{\beta} = \underline{\beta}(s)$

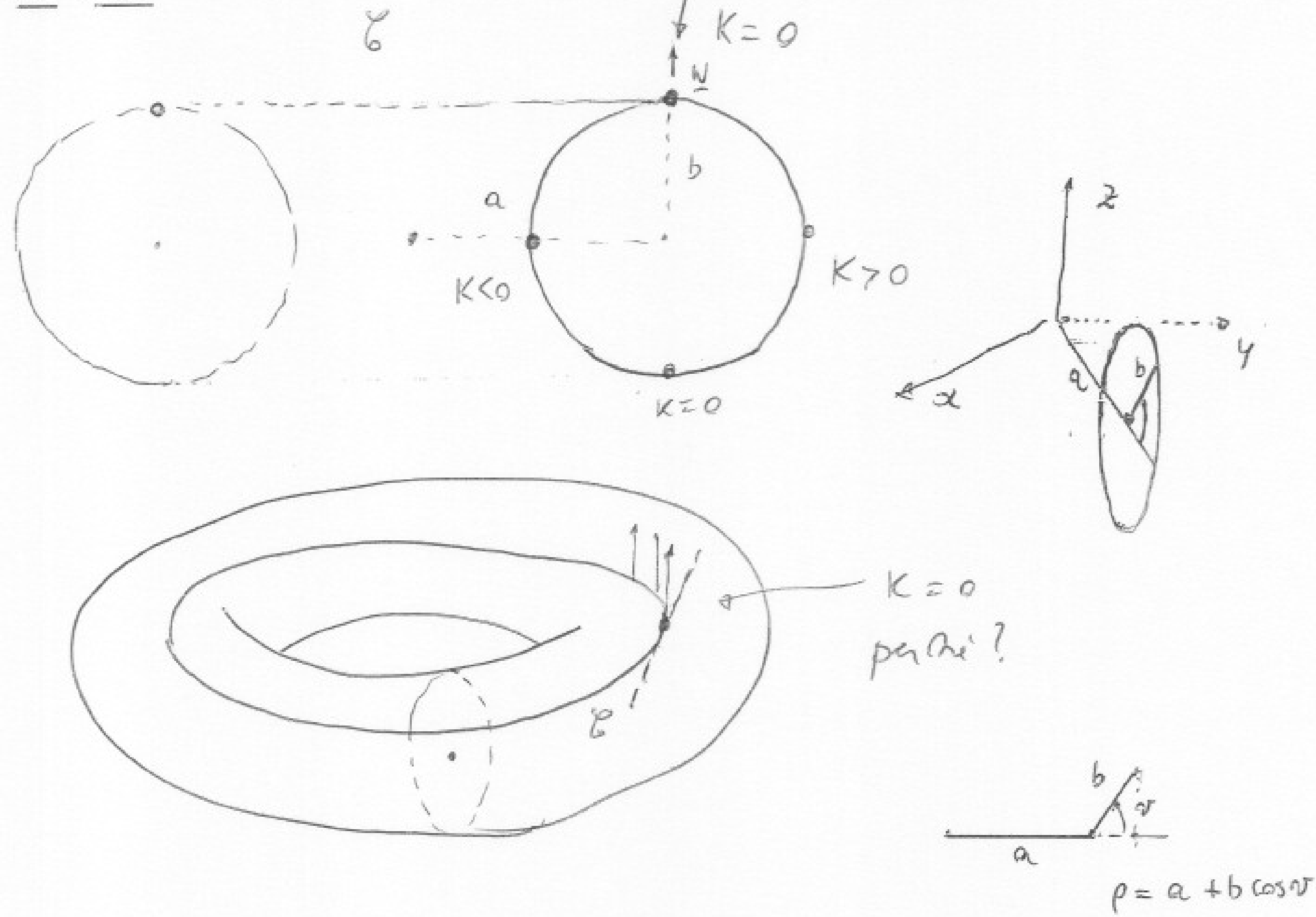


$$(\underline{N}\cos\alpha)' = \xi\,\underline{\beta}'$$

$$\cos\alpha\,\underline{N}' = \xi\,\underline{\beta}' \implies \underline{N}' = \eta\,\underline{\beta}'$$

e si conclude di nuovo in base a Rodrigues

◇ Sul toro



$\mathscr{C}$ è una linea di curvatura (è un parallelo)

$\Rightarrow \quad \underline{N}' = \lambda \underline{\alpha}'$ (Rodrigues).

Ma $\quad T_P \Sigma$ non varia per $P \in \mathscr{C}$ (v. anche fig.)

$\Rightarrow \quad \lambda = 0 \quad \Rightarrow$ una delle curvature principali è nulla

$\Rightarrow \quad K = 0$. Si noti anche che $k_n(\mathscr{C}) \equiv 0$

e si conclude anche in base a Meusnier.

Quanto vale l'altra curv. principale? R: $\frac{1}{b}$ (facile...)

◇ ◇ ◇

Parametrizzazione

$$\underline{r} = \underline{r}(u,v) = \begin{pmatrix} (a + b\cos v)\cos u \\ (a + b\cos v)\sin u \\ b \sin v \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} u \in [0, 2\pi) \\ v \in [0, 2\pi) \end{array}$$

forma cartesiana: ⚠

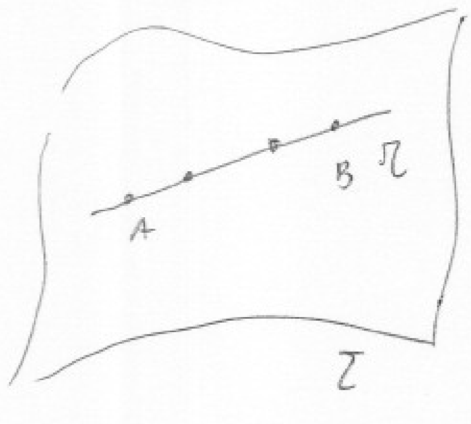
$$\left(\sqrt{x^2+y^2} - a\right)^2 + z^2 = b^2$$

$$x^2 + y^2 - 2a\sqrt{x^2+y^2} + z^2 - b^2 + a^2 = 0$$

$$4a^2(x^2+y^2) = (x^2+y^2+z^2+a^2-b^2)^2$$

○ Se Σ contiene una retta, quest'ultima è una geodetica

Dim.



se $\underline{r} = \underline{r}_0 + t\,\underline{a}$, è $\|\underline{a}\| = 1$

$\underline{r}' = \underline{a}$

e $\underline{r}'$ è parallelo lungo r ($\underline{r}'' = (\underline{r}')' = 0$

$\Downarrow$ a fortiori

$\frac{\nabla}{dt}\,\underline{r}' = \underline{0}$

oppure : la linea più breve tra A, B su Σ, $A \in r$, $B \in r$ è, nello spazio, la retta r, che giace su Σ, e si conclude.

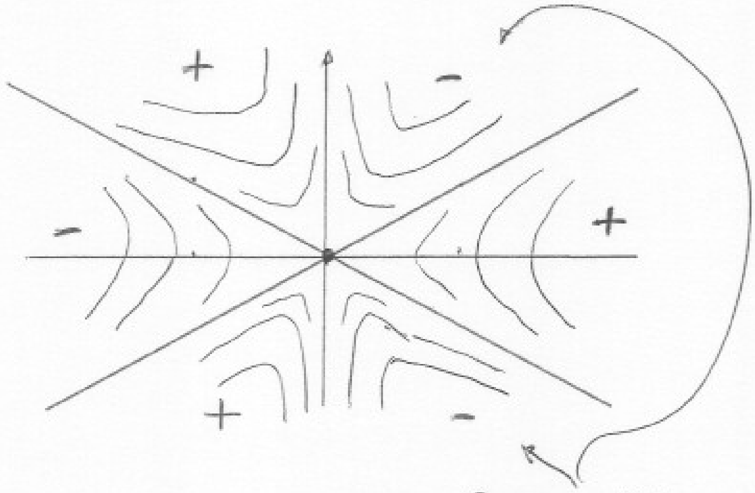
oppure : $k_g(r) \equiv 0$ (poiché già $k(r) \equiv 0$).

◇ La sella di scimmia

$$z = x^3 - 3xy^2 = \mathrm{Re}(\zeta^3) \qquad \zeta = x + iy$$

$$\| $$

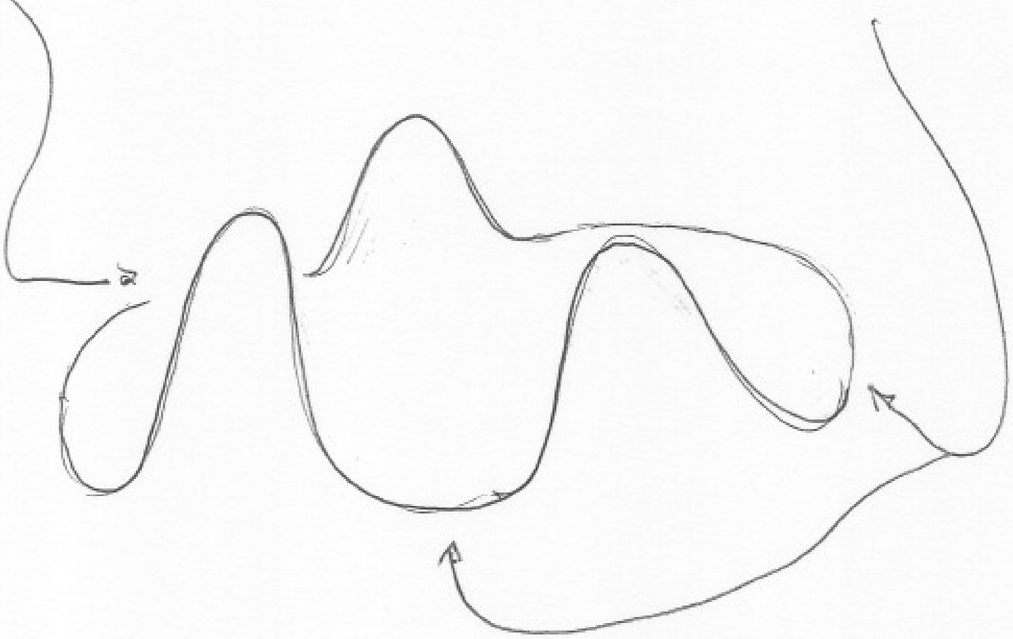
$$x(x^2 - 3y^2) = x(x - \sqrt{3}y)(x + \sqrt{3}y)$$



curve di livello

coda

zampe della scimmia



$P : (0,0,0)$ pto planare

$$\mathcal{H}_P(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow K = 0$$

$$k_1 = k_2 = 0$$

chiaro dallo sviluppo di Taylor