ELEMENTI DI GEOMETRIA

Prof. M. Spera

Lezione V

◇ Elementi di geometria proiettiva

◆ Sia (V, K) uno spazio vettoriale su K (per fissare le idee, supporremo $K = \mathbb{R}$ e V di dimensione finita $= n+1 \geq 0$).

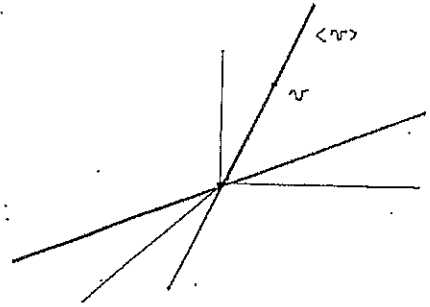
Def. Lo spazio proiettivo associato a V è costituito dai sottospazi di V di dimensione 1, ed è denotato con $\mathbb{P}(V)$. In simboli:

$$\mathbb{P}(V) = \{ \langle v \rangle \mid v \in V,\ v \neq \underline{0} \}$$

sottospazio unidimensionale generato da $v \neq 0$

Leggendo V come spazio affine (su se stesso), $\mathbb{P}(V)$ può identificarsi con l'insieme delle rette per l'origine $\underline{0} = 0_V$ di V.

Gli elementi di $\mathbb{P}(V)$ sono ancora chiamati punti. La dimensione di $\mathbb{P}(V)$ è per definizione n.



V.

◆ Ponendoci in $\mathbb{R}^{n+1}$ e posto $v = \begin{pmatrix} l_0 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

è $\langle v \rangle = \left\{ t \begin{pmatrix} l_0 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$, e le equazioni della retta corrispondente sono

$$\begin{cases} x_0 = t\, l_0 \\ \vdots \\ x_n = t\, l_n \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

e, in forma compatta $\boxed{x = t v}$

$\left(x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$.

Si noti che il cambiamento $l_j \to \rho l_j$, $\rho \neq 0$, lascia $\langle v \rangle$ invariato: si

passa semplicemente ad un nuovo generatore di $\langle v \rangle$, che pertanto è individuato da $(l_0 \dots l_n)$ a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

Definiamo dunque in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$ la seguente relazione di equivalenza ($x \neq 0$, $x' \neq 0$)

$$\overbrace{(x_0, \dots, x_n)}^{x} \sim \overbrace{(x_0', \dots, x_n')}^{x'}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x_j = \rho x_j' \qquad j = 0, 1, \dots, n \quad \rho \neq 0$$

(ovvero $x = \rho x'$)

Allora, in base a quanto visto sopra si ha, ponendo $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\mathbb{P}^n = \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}}{\sim}$$

l'insieme delle classi di equivalenza determinate da $\sim$

Dato $x = (x_0 \dots x_n)$, $x \neq 0$

$\big((x_0 \dots x_n) \neq (0, 0, \dots 0) \big)$, si pone

$$[(x_0, \dots x_n)] \equiv [x_0, \dots x_n]$$

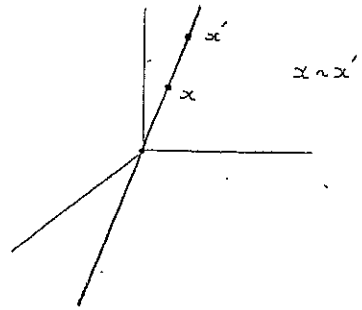
oppure

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$$

per ricordare che gli x_j sono determinati a meno di un fattore di proporzionalità non nullo

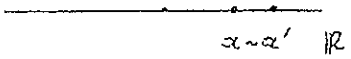
$[\cdot]$ classe di :

Def. Le $x_0 \dots x_n$ sono dette coordinate omogenee (o Plückeriane) del punto $[x_0, \dots x_n]$ da esse rappresentato, e risultano determinate a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

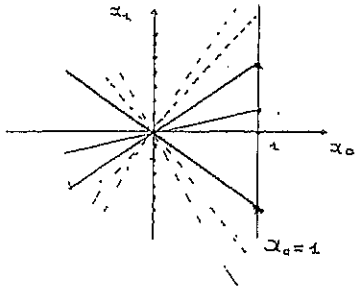


• Esempi

1. Se $n = 1$, è $\mathbb{P}(\mathbb{R}) = \mathbb{P}^0 = \{\text{punto}\}$



2. La <u>retta proiettiva</u> reale $\mathbb{P}^1$

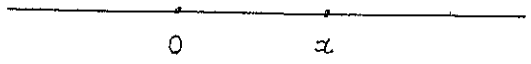


$$\begin{cases} x_0 = t\,l_0 \\ x_1 = t\,l_1 \end{cases} \qquad (l_0, l_1) \neq (0,0) \qquad t \in \mathbb{R}$$

Le rette per l'origine di $\mathbb{R}^2$ con $l_0 \neq 0$ sono in corrispondenza biunivoca con i punti di $x_0 = 1$ (per fissare le idee). La retta $x_0 = 0$ (l'asse x_1) ha coordinate omogenee $[0, l_1]$, $l_1 \neq 0$ (equivalentemente $[0,1]$) e rappresenta il "punto all'infinito" di $x_0 = 1$:

la retta affine $x_0 = 1$ è stata <u>ampliata</u> con l'aggiunta di un punto all'infinito.

In modo più algebrico procediamo così:

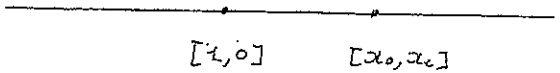


$\mathbb{R} \equiv \mathbb{A}$ (retta affine)

Poniamo:

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad x_0 \neq 0$$

coordinata affine



∞: $[0, x_1] = [0, 1]$ $(x_1 \neq 0)$

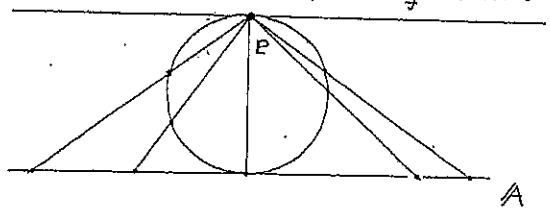
punti ordinari di $\mathbb{P}^1$ (o <u>propri</u>) (al finito) ($\equiv$ punti di $\mathbb{A}$)

∞: punto all'infinito di $\mathbb{A}$: viene aggiunto a questi

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{A} \cup \underset{\{\infty\}}{\underset{\parallel}{\mathbb{P}^0}}$$

è detto anche <u>punto improprio</u> di $\mathbb{P}^1$

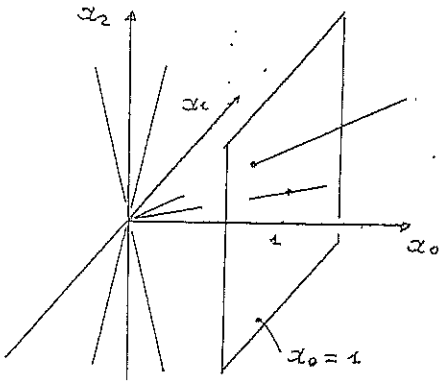
• Attraverso la <u>proiezione stereografica</u>, $\mathbb{P}^1$ può vedersi come una circonferenza

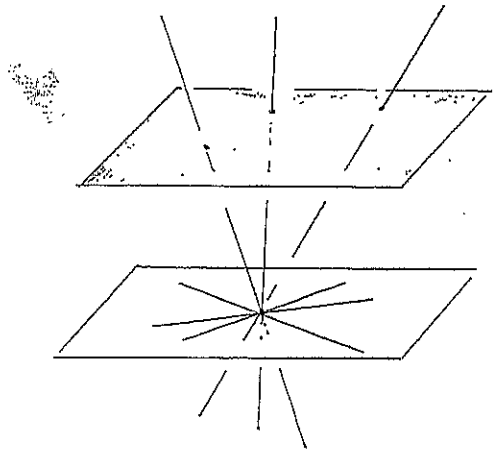


Il centro di proiezione P (cui non corrisponde alcun punto di $\mathbb{A}$) è il pto all'infinito di $\mathbb{A}$

Il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$

(è un piano affine ampliato con l'aggiunta di una retta (proiettiva !) all'infinito)





Le rette $\begin{cases} x_0 = t\,l_0 \\ x_1 = t\,l_1 \\ x_2 = t\,l_2 \end{cases}$ $\quad l_0 \neq 0.$

incontrano $x_0 = 1$ in uno e un sol punto

Le rette $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = t\,l_1 \\ x_2 = t\,l_2 \end{cases}$ $\quad (l_1, l_2) \neq (0,0)$

sono parallele al piano $\pi: x_0 = 1$: esse dànno luogo ad una retta proiettiva, la "retta all'infinito di π" ; precisamente : ogni retta diviene un punto di una retta proiettiva, detta retta all'infinito

Dunque, il piano proiettivo è un piano affine ampliato con l'aggiunta di una retta, di equazione $x_0 = 0$ (vedi anche oltre)

$$(x_0 : x_1 : x_2) = (1 : x : y)$$

$$[x_0, x_1, x_2] = [1, x, y] \qquad (x_0 \neq 0)$$

punti ordinari (propri)

$$[0, l_1, l_2] \qquad (l_1, l_2) \neq (0,0)$$

punti impropri

(che dànno vita ad una retta proiettiva, retta all'infinito, che descrive le direzioni delle rette tracciate sul piano affine)

Geometria del piano proiettivo

- punti $P : (x_0 : x_1 : x_2)$ $(\equiv [x_0, x_1, x_2])$
  $\neq (0, 0, 0)$

- propri (ordinari) $x_0 \neq 0$ $[1, x, y]$
  $x = \frac{x_1}{x_0}$ $y = \frac{x_2}{x_0}$

- improprii $x_0 = 0$ $[0, x_1, x_2]$
  $(x_1, x_2) \neq (0,0)$

vengono trattati alla stessa maniera!

- rette r: $\boxed{a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0}$

  equazione lineare omogenea

  $(a_0, a_1, a_2) \neq (0,0,0)$

  coordinate plückeriane di retta

La retta $x_0 = 0$ è detta retta impropria e denotata con r_∞

Mostriamo che non esistono rette parallele, ovvero che due rette qualsiasi sono incidenti (o, in particolare, coincidenti)

Consideriamo $r \neq r'$

$$\begin{cases} r: & a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \\ r': & a_0' x_0 + a_1' x_1 + a_2' x_2 = 0 \end{cases}$$

$(a_0, a_1, a_2) \neq (0,0,0)$

$(a_0', a_1', a_2') \neq (0,0,0)$

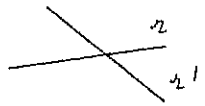
La matrice del sistema,

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_0' & a_1' & a_2' \end{pmatrix}$$

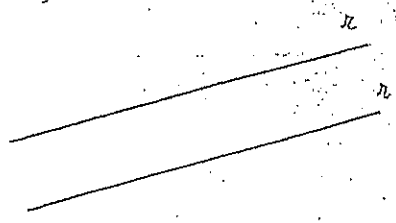
ha rango 2 $(= \max)$ $\Rightarrow \exists\ \infty^1$ soluzioni e sono tutte multiple l'una dell'altra: ogni soluzione non banale

$(x_0, x_1, x_2) \neq (0, 0, 0)$

dà luogo allo stesso punto di $\mathbb{P}^2$.



Consideriamo ora, in $\mathbb{A}^2$, due rette parallele (distinte) r e r' $r \parallel r'$



r: $ax + by + c = 0$ $(a,b) \neq (0,0)$

r': $a'x + b'y + c' = 0$ $(a', b') \neq (0,0)$

dunque: $a = \rho a'$, $b = \rho b'$, $c \neq \rho c'$ $\rho \neq 0$

Senza perdere in generalità assumiamo

$\rho = 1$, cioè $a = a'$, $b = b'$

(e, necessariamente $c \neq c'$)

Leggiamo r e r' come rette in $\mathbb{P}^2$

(aggiungendo loro automaticamente un punto improprio (la loro direzione) :

operiamo così (omogeneizzazione)

$x = \frac{x_1}{x_0}$ $y = \frac{x_2}{x_0}$ $* x_0 \neq 0$

perveniamo, sostituendo, a

$r: \quad a x_1 + b x_2 + c x_0 = 0$

$r': \quad a x_1 + b x_2 + c' x_0 = 0$

lasciamo ora cadere la restrizione $x_0 \neq 0$

e risolviamo il sistema : si arriva a

$$(c - c') x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0$$

e, successivamente

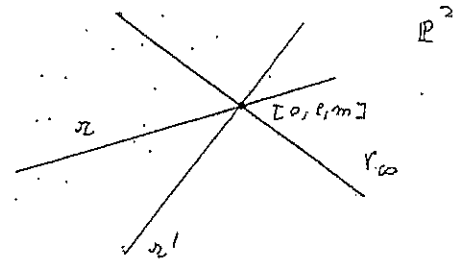
$$a x_1 + b x_2 = 0$$

$\Rightarrow$ $x_1 = t l$
$x_2 = t m$, con (l, m) parametri direttori di r e r'
$((l, m) \neq (0,0))$

Si ricordi che $a l + b m = 0$

r_∞: $x_0 = 0$

Dunque $r \cap r_\infty = r' \cap r_\infty = [0, l, m]$



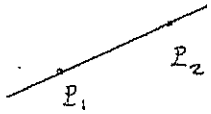
☆ Conclusione : I parametri direttori divengono le coordinate proiettive del punto all'infinito di una retta, e due rette parallele si incontrano in tale punto : ciò conferisce un significato preciso alla locuzione

Due rette parallele si incontrano all'infinito

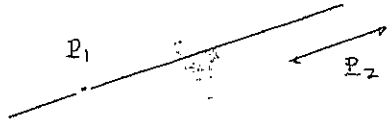
Due rette parallele appunto hanno in comune la direzione.

In definitiva due rette distinte determinano sempre un punto, loro intersezione, proprio o improprio (in quest'ultimo caso sono parallele, se viste nel piano affine).

Non solo: due punti distinti determinano una e una sola retta, in tutti i casi: ciò è chiaro se P_1 e P_2 sono propri.

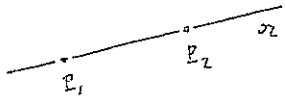


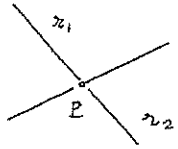
Se P_1 e P_2 sono entrambi impropri, essi determinano la retta impropria r_∞ (di equazione $x_0 = 0$). Se P_1 è proprio e P_2 improprio, per fissare le idee, la retta in questione è la retta passante per P_1 di direzione P_2 (con l'aggiunta di P_2 stesso)



$P_2 = [0, l, m]$ $\quad (l,m) \neq (0,0)$

Si dice che: due punti distinti e una retta, oppure due rette distinte e un punto si appartengono (qualità proiettiva)

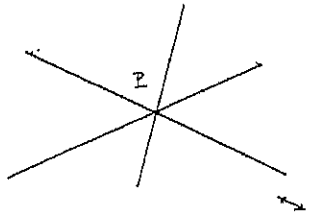




(si scambiano le parole punto e retta)

Nel piano proiettivo, cade la distinzione tra fasci di rette propri e impropri: si ha un solo tipo di fascio

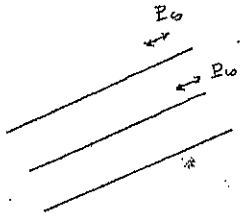
$\mathbb{P}^2$

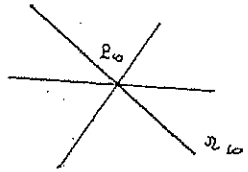


P proprio

ad ogni retta è aggiunto un pto all'infinito (la sua direzione)

P_∞ improprio





Il fascio consta di r_∞ e di tutte le rette aventi direzione individuata da P_∞

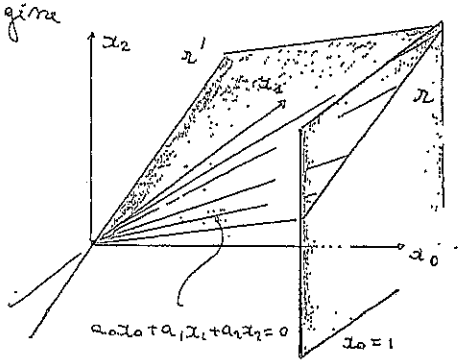
Osservazione:

l'equazione $r: a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ $(a_0, a_1, a_2) \neq (0,0,0)$, che in $\mathbb{P}^2$ rappresenta una retta, vista in $\mathbb{R}^3$ rappresenta ovviamente un piano per l'origine; l'intersezione con il piano $x_0 = 1$ produce i punti propri della retta proiettiva in questione.

In $\mathbb{R}^3$ $r: \begin{cases} a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \\ x_0 = 1 \end{cases}$

ponendo $x_0 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ l'equazione affine di r è $a_0 + a_1x + a_2y = 0$.

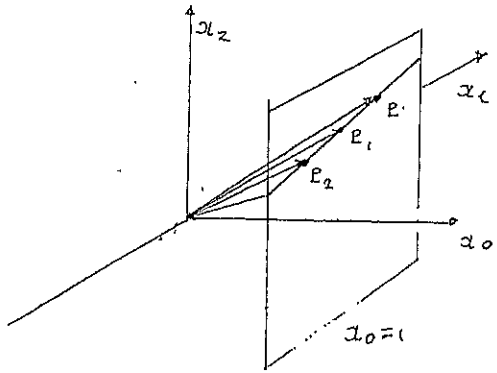
In quest'ultima descrizione è perduto il punto improprio $[\underset{l}{0}, \underset{m}{-a_2, a_1}]$: tale punto corrisponde alla retta r' (v. fig.) parallela ad r e passante per l'origine



- Equazione della retta passante per due punti $P_1: [x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}]$ e $P_2: [x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}]$ (distinti)

Si ricava subito osservando che, in $\mathbb{R}^3$, i vettori v (corrispondente a $P: [x_0, x_1, x_2]$ con una scelta fissata delle coordinate omogenee), v_1, v_2 (come sopra...) devono essere linearmente dipendenti. Pertanto si ha

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} = 0$$



qui $x_0, x_0^{(1)}, x_0^{(2)}$ sono tutte $= 1$

Ad esempio, se P_1 e P_2 sono propri, e ci limitiamo ad una descrizione affine, si ritrova (ponendo $x_0 = x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = 1 \ldots$)

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x^{(1)} & y^{(1)} \\ 1 & x^{(2)} & y^{(2)} \end{vmatrix} = 0$$

v. figura precedente

equivalentemente

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x^{(1)} & x^{(2)} \\ y & y^{(1)} & y^{(2)} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{vmatrix} x - x^{(1)} & y - y^{(1)} \\ x^{(2)} - x^{(1)} & y^{(2)} - y^{(1)} \end{vmatrix} = 0$$

cf. la discussione sull'area del triangolo!

Sia $P_1 : [1, x_1, y_1]$ (proprio)

e $P_2 : [0, l, m]$ (improprio)

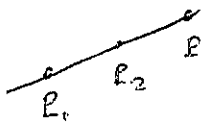
$(l, m) \neq (0, 0)$

Si trova (nel piano affine)

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & l & m \end{vmatrix} = 0$$

ovvero

$$\begin{vmatrix} 0 & x - x_1 & y - y_1 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & l & m \end{vmatrix} = 0$$



danno vita ad un triangolo di area nulla

$$\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ l & m \end{vmatrix} = 0$$

$$m(x - x_1) - l(y - y_1) = 0$$

ovvero, la retta per P_1 avente direzione individuata da $\underline{v} = (l, m)$

Geometria in $\mathbb{P}^3$

L'equazione $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$
$(a_0, a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0,0)$

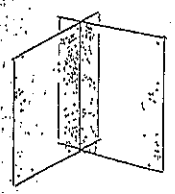
rappresenta un piano (proiettivo).

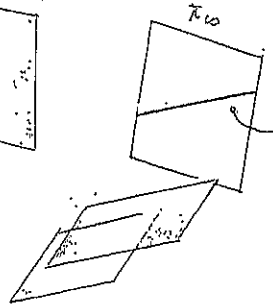
$x_0 = 0$ è il piano improprio π_∞

Anche in questo caso, non ci sono piani paralleli.

Due piani distinti π_1 e π_2 individuano una retta (proiettiva) che può essere propria o impropria (in quest'ultimo caso è una retta di π_∞, e individua una giacitura (con la aggiunta della sua direzione)

Se π_1 e π_2 non sono paralleli (dal pto di vista affine):





è l'equazione di una retta proiettiva in un $\mathbb{P}^2$ che rappresenta la giacitura dei piani paralleli π_1 e π_2

$$\pi_\infty \begin{cases} x_0 = 0 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \end{cases}$$

è π_1 e π_2 sono paralleli, dal pto di vista affine

Ricapitolando

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^n \cup \mathbb{P}^{n-1} \qquad n \geq 1$$

costruzione ricorsiva

$n = 1$

$$\underset{\text{retta proiettiva}}{\mathbb{P}^1} = \underset{\text{retta affine}}{\mathbb{A}} \cup \underset{\text{punto}}{\mathbb{P}^0 = \{\infty\}}$$

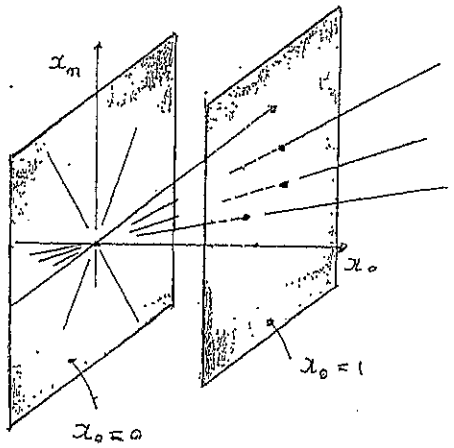
$n = 2$

$$\underset{\text{piano proiettivo}}{\mathbb{P}^2} = \underset{\text{piano affine}}{\mathbb{A}^2} \cup \underset{\text{retta proiettiva}}{\mathbb{P}^1}$$

(r_∞: retta all'infinito)

$n = 3$

$$\underset{\text{spazio proiettivo 3-d}}{\mathbb{P}^3} = \underset{\text{spazio affine 3-d}}{\mathbb{A}^3} \cup \underset{\text{piano (proiettivo) all'infinito}}{\mathbb{P}^2}$$



L'oggetto aggiunto, nel riferimento dato, ha, di volta in volta, sempre l'equazione $x_0 = 0$

$\mathbb{P}^1$ $\infty = [0, 1]$

$\mathbb{P}^2$ r_∞: $x_0 = 0$

$\mathbb{P}^3$ π_∞: $x_0 = 0$

Omografie

Il gruppo $GL(V)$ induce su $\mathbb{P}(V)$ le cosiddette trasformazioni proiettive, o omografie, o proiettività, che costituiscono al loro volta il gruppo proiettivo $PGL(V)$.

Esaminiamo il caso $n=1$ $(n+1=2)$

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{cases} y_0 = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 \\ y_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 \end{cases}$$

$$y = \frac{y_1}{y_0} = \frac{a_{10}x_0 + a_{11}x_1}{a_{00}x_0 + a_{01}x_1} = \frac{a_{11}x + a_{10}}{\underbrace{a_{01}x + a_{00}}_{x \neq 0}}$$

in termini affini

L'applicazione $x \mapsto y$ così definita è detta anche trasformazione di Möbius o trasformazione lineare fratta; di fatto si può far sì che $\det A = 1$, e, inoltre, y non cambia se $a_{ij} \mapsto -a_{ij}$

Si ottiene il gruppo $PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$

Se ora imponiamo che il punto all'infinito rimanga fisso $(x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0)$ deve essere $\boxed{a_{01} = 0}$ $\Rightarrow$

$$y = ax + b$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}}$$

per $a \neq 0$ e b opportuni: ma tali trasformazioni sono proprio le trasformazioni affini di $\mathbb{R}$ $(Aff(\mathbb{R}))$.

Se poi vogliamo conservare le lunghezze è $a = \pm 1$, e b arbitrario: si ottengono i movimenti rigidi $M(\mathbb{R})$ (qui, traslazioni e simmetrie rispetto ad un punto).

Si noti che per fissare un nuovo riferimento proiettivo (coordinate $[y_0\ y_1]$) basta fissare le immagini di

$[1, 0]$ (origine)

$[0, 1]$ (punto all'infinito)

$[1, 1]$ punto unità

o, in generale, di tre punti distinti

La trasformazione di Möbius prende la forma

$$(*)\quad \frac{y-y_1}{y-y_3}\cdot\frac{y_2-y_3}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x-x_3}\cdot\frac{x_2-x_3}{x_2-x_1}$$

che esprime l'invarianza del biarapporto dei punti x_1, x_2, x_3, x assoggettati ad una trasformazione proiettiva

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x$

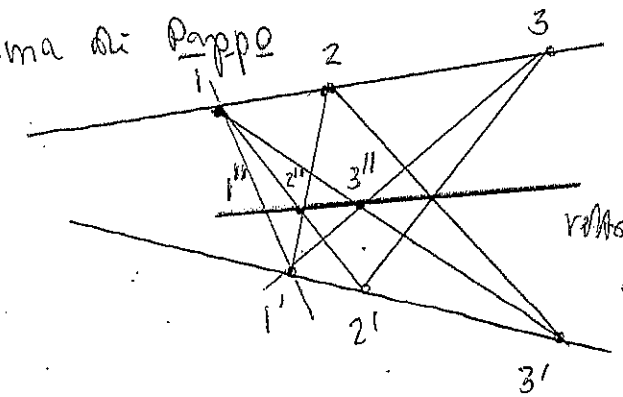
Si osservi che se $x_2 = \infty$, $y_2 = \infty$, la (*) diventa (trasf. affine)

$$\frac{y-y_1}{y-y_3} = \frac{x-x_1}{x-x_3} = a \qquad (\text{se } y = ax+b)$$

costante di affinità o caratteristica dell'affinità

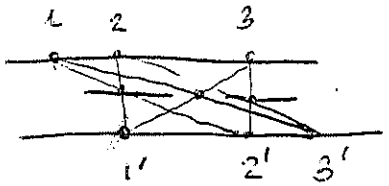
(conservazione dei rapporti semplici)

Teorema di Pappo



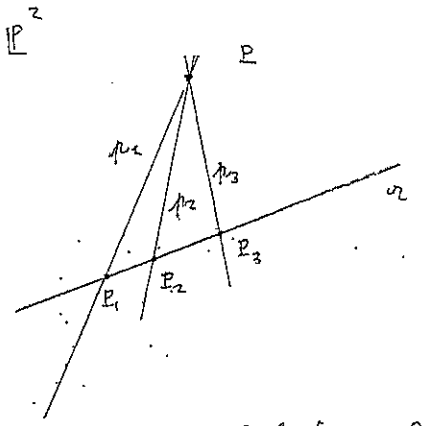
retta di Pappo

asse di collineazione



caso affine

Costruzioni geometriche

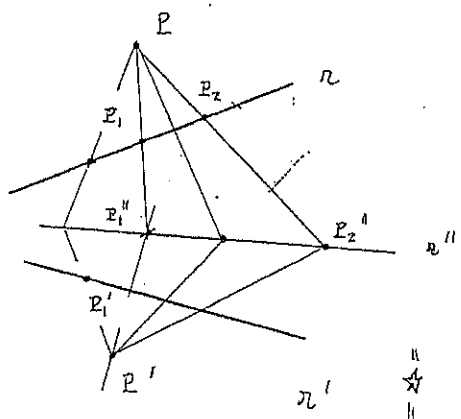


proiezione di r da P

c'è corrispondenza biunivoca tra le rette del fascio di centro P e r e i punti di r (proiettiva = mente essa è senza eccezioni)

viceversa, dal fascio di centro P, segando con $r \not\ni P$ si sezione il fascio dato

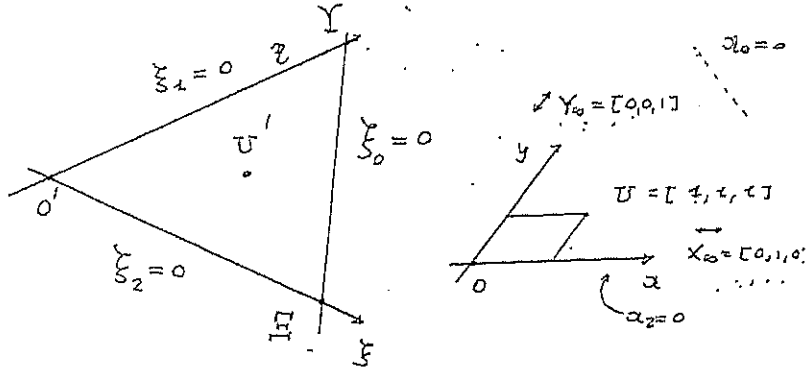
• r e r'', r' e r'' sono prospettive



fissati P, P' e pti corrispondenti $P_1 \leftrightarrow P_1'$, $P_2 \leftrightarrow P_2'$ è individuata r'' e l'intera corrispondenza

☆ viene conservato il biarapporto dei quattro punti corrispondenti

Riferimenti proiettivi su $\mathbb{P}^2$



Si fissino quattro punti distinti, a tre a tre non allineati

$O' \equiv$ nuova origine $\quad U' \equiv$ nuovo punto unità

$X \equiv$ direzione dell'asse ξ (pto all'infinito dell'asse ξ) : $[1,0,1,0]$

$Y \equiv$ direzione dell'asse η (pto all'infinito dell'asse η) : $[0,0,1]$

$\xi_0 = 0$ retta impropria nel nuovo riferimento

$$\xi = \frac{\xi_1}{\xi_0}, \quad \eta = \frac{\xi_2}{\xi_0}$$ nuove coordinate affini (non omogenee)

Cenno: da riprendersi in seguito.

- Le trasformazioni affini nell'approccio proiettivo

[Nota: ciò risulta molto utile, ad esempio, nella grafica computerizzata]

Possiamo procedere in generale: data una trasformazione affine in $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$:

$$x \longmapsto Ax + b \equiv x' \qquad A \in GL_n(\mathbb{R})$$

Lavorando in $\mathbb{R}^{n+1}$ e sostituendo

$$x \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$

(Perché?)

Passando a coordinate omogenee $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ etc.

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

★★★

Si vede, più in generale, che le trasformazioni affini sono le trasformazioni proiettive che lasciano fisso l'iperpiano all'infinito $x_0 = 0$

infatti $x_0 = 0$ diviene $x_0' = 0$

Casi particolari importanti $n = 2$ (piano affine) $n = 3$ (spazio affine).

★ L'interpretazione proiettiva conferisce chiarezza e cogenza all'intera trattazione.

Si noti, in particolare, che, nello spazio, tale riformulazione consente di trattare con un singolo formalismo traslazioni e rotazioni

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & I \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

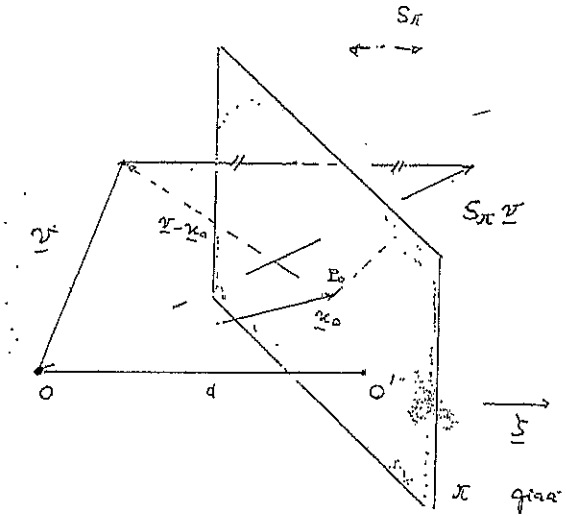
(o trasformazioni polari quadri)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\,0\,0 \\ b_1 & 1\,0\,0 \\ b_2 & 0\,1\,0 \\ b_3 & 0\,0\,1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0\,0\,0 \\ 0 & \\ 0 & (R_{ij}) \\ 0 & \end{pmatrix}$$

il che produce notevoli vantaggi applicativi.

INCISO

★ Esempio



π giacitura: V

In $S \cong S_0$ $\quad \|\xi\| = 1 \quad \langle \xi | \xi \rangle = 0$ eq. condizione.

Descriviamo la simmetria ortogonale rispetto al piano π (non passante per l'origine)

sia $-x_0 = \overline{OP_0}$; $P_0 \in \pi$

$$v = x_0 + v - x_0 \longmapsto x_0 + \underbrace{S_V}_{\substack{\text{simmetria} \\ \text{ortogonale} \\ \equiv S_V^{V^\perp}}} (v - x_0) \equiv S_\pi v$$

scegliamo la nuova origine O' (cioè x_0) in modo che $\overline{OO'} = d \cdot \xi$

$$\begin{aligned} S_\pi v &= x_0 + v - x_0 - 2 \langle v - x_0 | \xi \rangle \xi \\ &= v - 2 \langle v - d\xi | \xi \rangle \xi \\ &= v - 2 \langle v | \xi \rangle \xi + 2d \cdot \xi \end{aligned}$$

$$S_\pi \underline{v} = \underline{v} - 2\langle \underline{v} | \underline{\xi} \rangle \underline{\xi} + 2d\,\underline{\xi}$$

Si noti che se $d=0$ ritroviamo l'espressione di una simmetria rispetto ad un piano per l'origine

Formulazione equivalente:

$$S_\pi v = (2P_U - I)\,\underline{v} + \underbrace{2d\,\underline{\xi}}_{\text{termine di traslazione}}$$

È facile ricavare la matrice rappresentativa rispetto ad un riferimento ortonormale..

Riprendiamo ora la formula iniziale

$$S_\pi \underline{v} = \underline{u}_0 + S_U(v - \underline{u}_0)$$

posto $T_{\underline{u}_0} w := w + u_0$

si ha $(T_{\underline{u}_0})^{-1} = T_{-\underline{u}_0}$

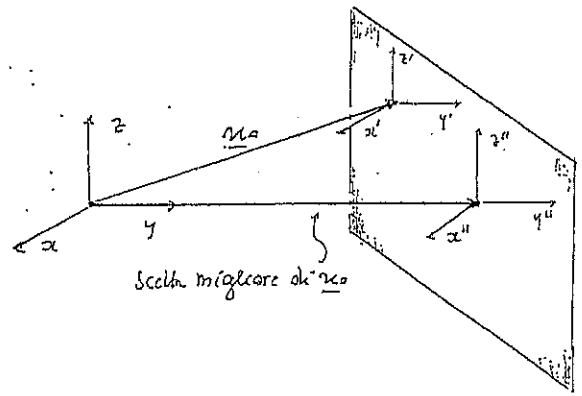
e

$$S_\pi \underline{v} = T_{\underline{u}_0} S_U T_{-\underline{u}_0} \underline{v}$$

cioè, <u>in astratto</u>

$$(*) \quad S_\pi = T_{\underline{u}_0} S_U T_{-\underline{u}_0}$$

A questo punto possiamo rappresentare (*) <u>concretamente</u> in termini di matrici (invertibili) 4×4:



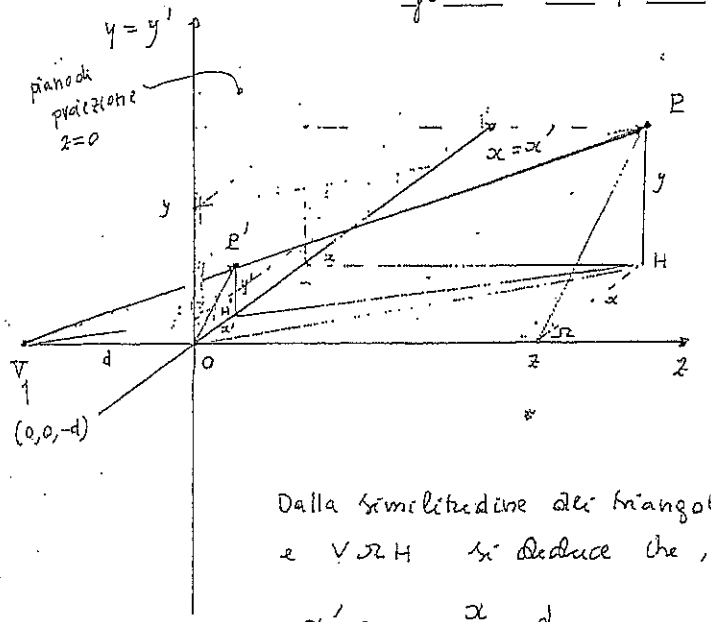
$$S_\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underline{u}_0 & I \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{H} \end{pmatrix}}_{S_U} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\underline{u}_0 & I \end{pmatrix}$$

$\mathcal{H}$: matrice di Householder

I vantaggi teorici e applicativi di tale approccio sono evidenti...

Cenno

* Geometria della proiezione prospettica



Dalla similitudine dei triangoli VOH' e VPH si deduce che, se $P:(x,y,z)$

$$x' = \frac{x}{z+d}\cdot d$$

Da quella dei triangoli VH'P' e VHP si deduce

$$y' = \frac{y}{z+d}\cdot d$$

$$z' = 0$$

$$r = \frac{1}{d}$$

ovvero

⚠ non si tratta di una trasformazione lineare di $\mathbb{R}^3$!

$$\begin{cases} x' = \dfrac{d}{z+d}\,x = \dfrac{1}{rz+1}\,x \\ y' = \dfrac{d}{z+d}\,y = \dfrac{1}{rz+1}\,y \\ z' = 0 = 0 \end{cases}$$

Descriviamola in termini proiettivi

è indotta da una trasformazione lineare di $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Se $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (1, x, y, z)$ si ha

$$\begin{cases} x_0' = 1 + rz \\ x_1' = x \\ x_2' = y \\ x_3' = 0 \end{cases}$$

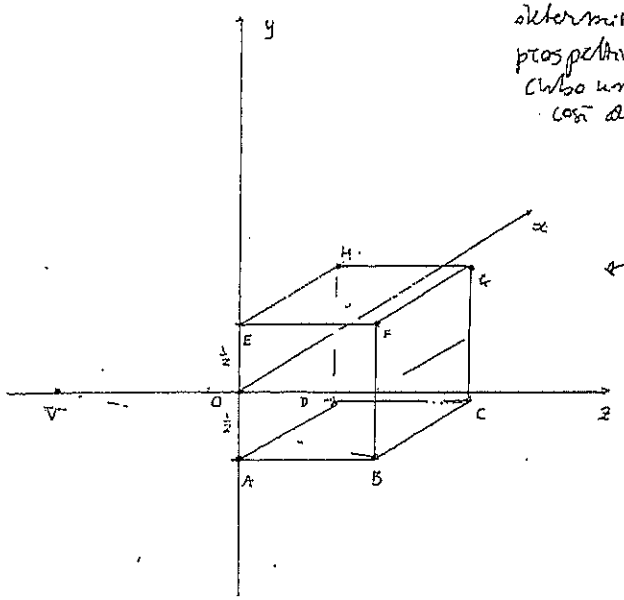
posto $x' = \dfrac{x_1'}{x_0'}$, $y' = \dfrac{x_2'}{x_0'}$, $z' = \dfrac{x_3'}{x_0'}$

ritroviamo infatti

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{rz+1} \\ y' = \dfrac{y}{rz+1} \\ z' = 0 \end{cases}$$

Si noti che il piano all'infinito nel riferimento con apici è $x_0' = 0$, cioè $x_0 + r x_3 = 0$ nel riferimento iniziale: la proiezione prospettica, come è evidente a priori, NON È UNA TRASFORMAZIONE AFFINE!

A titolo di esercizio, determiniamo la prospettiva del cubo unitario così disposto



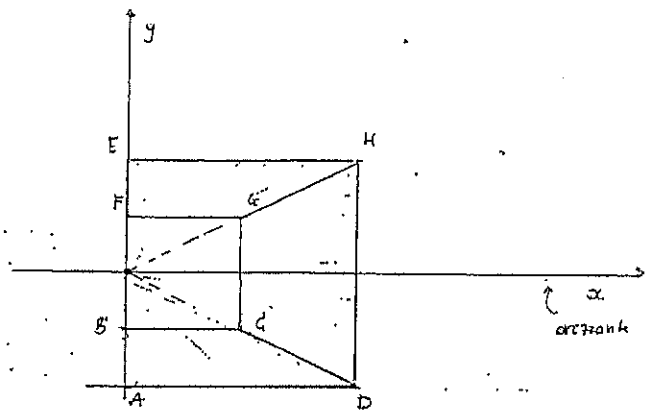
$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto A' = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e così } D, H, E$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto B' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-\frac{1}{2}}{r+1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2(r+1)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto C' = \begin{pmatrix} \frac{1}{r+1} \\ -\frac{1}{2(r+1)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto F' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2(r+1)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

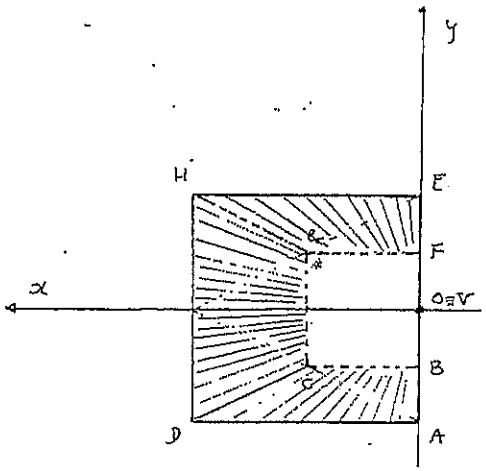
$$G = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto G' = \begin{pmatrix} \frac{1}{r+1} \\ \frac{1}{2(r+1)} \\ 0 \end{pmatrix}$$



poniamo ad esempio $r = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{r+1} = \frac{1}{2}$$

$$\pm \frac{1}{2(r+1)} = \pm \frac{1}{4}$$



così V percepisce il cubo

- Un cenno al caso generale: il programma di Erlangen

  - $P\&L(n+1, \mathbb{R})$ gruppo proiettivo lineare è
    (indotto da $GL_{n+1}(\mathbb{R})$ agente su $\mathbb{R}^{n+1}$ – su $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$)

  - $Aff(\mathbb{R}^n)$ = sottogruppo di $P\&L(n, \mathbb{R})$ che fissa l'iperpiano all'infinito, di equazione $x_0 = 0$ in $\mathbb{R}^{n+1}$
    (globalmente, non necessariamente punto per punto)

e, successivamente,

  - $M(\mathbb{R}^n)$ = gruppo dei movimenti euclidei (o rigidi): è il sottogruppo di $Aff(\mathbb{R}^n)$ che conserva le distanze

$$y = Ax + c \qquad A \in O(n)$$

Si ha perciò la seguente gerarchia

* NOZIONI	* GEOMETRIA	* gruppo strutturale
• incidenza	geometria proiettiva	$P\&L$ gruppo proiettivo lineare
	fissando l'iperpiano all'∞	
• incidenza ◇ parallelismo	geometria affine	Aff gruppo affine
	si conservano le distanze	
• incidenza ◇ parallelismo + congruenza	geometria euclidea	M gruppo dei movimenti

[nel senso di sovrapponibilità]

[ne studieremo più in dettaglio la rappresentazione matriciale e l'applicazione alla visione computazionale]

Dunque:

lo studio di una data "geometria" consiste nell'esaminare le proprietà invarianti rispetto ad un dato gruppo di trasformazioni

Questo è il famoso Programma di Erlangen di F. Klein (1872).

☆ I vari tipi di geometria (anche quelle "non euclidee") si possono ricondurre in tutti i casi alla geometria proiettiva (fissando un'opportuna iperquadrica (nel caso generale) detta assoluto).

Il carattere elementare di questo corso ci impedisce, purtroppo, di procedere oltre in questa direzione.

Commento estemporaneo

Il concetto di invarianza rispetto ad un gruppo di trasformazioni è cruciale anche in altri contesti, per esempio in fisica.

La fisica non relativistica è caratterizzata dall' "invarianza galileiana" (nello spazio-tempo (coordinate $t, x, y, z \ldots$)

In relatività ristretta si parla di invarianza rispetto al "gruppo di Lorentz" o, più in generale, rispetto al "gruppo di Poincaré"; si parla di "invarianza per diffeomorfismi" in relatività generale e di "invarianza di gauge" nelle teorie delle particelle elementari ecc. ecc.

Vale a dire le leggi di una data "fisica" sono invarianti (ovvero: conservano la stessa forma) rispetto al relativo "gruppo".

Chiudiamo questa brevissima parentesi col ricordare il bellissimo teorema di Emmy Noether: (in modo vago)

"ogni invarianza dà luogo ad una quantità conservata";

per esempio, l'invarianza rispetto alle traslazioni temporali è legata alla conservazione dell'energia, quella rispetto alle traslazioni spaziali alla conservazione della quantità di moto, quella rotazionale alla conservazione del momento angolare ...

Si è allora portati a dire, con Einstein, che la fisica è ... geometria!