Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Algebra lineare — 11 dicembre 2006

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3	

Compito A

T1) Si enunci il teorema nullità + rango e lo si applichi per dimostrare i seguenti enunciati, dove V e W sono spazi vettoriali:

(1) *Sia* $f\colon V \to V$ *un'applicazione lineare; allora* f *è iniettiva se e solo se* f *è suriettiva.*
(2) *Sia* $f\colon V \to W$ *un'applicazione lineare; se* $\dim V \neq \dim W$ *e* f *è iniettiva, allora* f *non è suriettiva.*

Soluzione. Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali e sia V finitamente generato. Allora $Im(f)$ è finitamente generato e

$$\dim V = \dim N(f) + \dim Im(f)$$

(1) Affermare che f è iniettiva equivale a dire che $\dim N(f) = 0$, per cui dal teorema nullità+rango $\dim V = \dim Im(f)$, e quindi, poiché $Im(f) \subseteq V$, si conclude che $Im(f) = V$, cioè f è suriettiva.
Viceversa se f è suriettiva, $V = Im(f)$, quindi $\dim V = \dim Im(f)$ e quindi $\dim N(f) = 0$, cioè f è iniettiva.
(2) Se f è iniettiva allora $\dim N(f) = 0$, cioè, per il teorema nullità+rango $\dim V = \dim Im(f) \neq \dim W$, quindi f non è suriettiva.

T2) Si diano le definizioni di autovalore e autovettore per una matrice e si dimostri che, se λ_1, λ_2,..., λ_k sono autovalori distinti di una matrice $\mathbf{A}$ con autovettori rispettivamente $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_k$, allora l'insieme $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_k\}$ è linearmente indipendente.

Soluzione Sia $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$.Uno scalare $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che esista $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ per cui $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ si dice *autovalore* della matrice $\mathbf{A}$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore di $\mathbf{A}$, ogni vettore $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ per cui si ha $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ si dice *autovettore di* $\mathbf{A}$ *relativo* a λ.
Per la dimostrazione, in cui si procede per induzione sul numero di autovettori relativi a autovalori distinti, si veda il testo (Teorema 4.3 e Corollario 4.4, pag. 202).

E1) Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 1-\alpha & \alpha-1 & 1 & 0 \\ \alpha-1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1-\alpha & 0 & 1 & 0 \\ \alpha-1 & 1 & 0 & \alpha-1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione LU e, per i valori di α per i quali non è possibile, una decomposizione P^TLU. Si calcolino anche basi dello spazio delle colonne e dello spazio nullo di $\mathbf{A}_\alpha$, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

Soluzione Consideriamo la matrice A_α,

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & \alpha-2 & 2-\alpha & 1 & 0 \\ 2-\alpha & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & \alpha-2 & 0 & 1 & 0 \\ 2-\alpha & 1 & 0 & 2-\alpha & -1 \end{pmatrix}$$

Se $\alpha \neq \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{3}$ possiamo considerare la decomposizione LU di A_α senza effettuare scambi di righe:

$$A_\alpha \longrightarrow U_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2-\alpha & \alpha-2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & (\alpha-1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -(\alpha-3)^{-1} \end{pmatrix}$$

in cui $U_\alpha = L_\alpha^{-1} A_\alpha$ e

$$L_\alpha^{-1} = E_{44}((\alpha-3)^{-1})\, E_{43}(-1)\, E_{33}((\alpha-2)^{-1})\, E_{42}((\alpha-2)^2-1)$$
$$E_{22}((\alpha-1)^{-1}(3-\alpha)^{-1})\, E_{41}(\alpha-2)\, E_{31}(1)\, E_{21}(\alpha-2)\, E_{11}(-1)$$

Da cui

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2-\alpha & (\alpha-1)(3-\alpha)) & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha-2 & 0 \\ 2-\alpha & -(\alpha-2)^2+1 & 1 & \alpha-3 \end{pmatrix}$$

Notiamo, inoltre che il $\text{rk}A_\alpha = 4$ e una base per $Col(A_\alpha)$ è dato dalle prime 4 colonne di A_α.
Lo spazio nullo di A_α ha dimensione 1, e una base si ottiene risolvendo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice U_α, che ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro (x_5).
Pensando alla matrice A_α come ad una matrice completa associata ad un sistema lineare si ha che tale sistema ammette un'unica soluzione.

Per $\alpha = 1, 2, 3$ invece, si debbono effettuare degli scambi di riga, dobbiamo quindi determinare delle decomposizioni $P^T LU$ di A_α, $\alpha = 1, 2, 3$.

Caso $\alpha = 1$.

Per $\alpha = 1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Scambiamo la seconda riga con la quarta:

$$A_1 \xrightarrow{E_{42}} P_1 A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora applichiamo la decomposizione LU a $P_1 A_1$

$$P_1 A_1 \longrightarrow U_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$A_1 = P_1^T L_1 U_1$$

in cui

$$L_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

e $P_1 = E_{42}$. Notiamo che $rk\, A_1 = 4$ e una base per $Col(A_1)$ è data dalla prima e la terza, la quarta e la quinta colonna di A_1.
Lo spazio nullo di A_1 ha dimensione 1, e una base si ottiene risolvendo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice U_1, che ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro (x_2).
Pensando alla matrice A_1 come ad una matrice completa associata ad un sistema lineare, si ha che tale sistema

non ammette soluzioni in quanto la colonna dei termini noti è dominante.

Caso $\alpha = 2$.

Per $\alpha = 2$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Scambiamo la terza con la quarta riga

$$A_2 \xrightarrow{E_{34}} P_2 A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora applichiamo la decomposizione LU a $P_2 A_2$

$$P_2 A_2 \longrightarrow U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$A_2 = P_2^T L_2 U_2$$

dove

$$L_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $P_2 = E_{34}$.
Notiamo che $rk\, A_2 = 3$, quindi una base per $Col(A_2)$ è data dalle prime tre colonne di U_2.
Lo spazio nullo di A_2 ha dimensione 2, e una base si ottiene risolvendo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice U_2, che ammette infinite soluzioni dipendenti da due parametri (x_4 e x_5).
In questo caso pensando alla matrice A_2 come ad una matrice completa associata ad un sistema lineare si ha che tale sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro.

Caso $\alpha = 3$.

Per $\alpha = 3$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Scambiamo la seconda riga con la quarta:

$$A_3 \xrightarrow{E_{42}} P_3 A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora applichiamo la decomposizione LU a $P_3 A_3$

$$P_3 A_3 \longrightarrow U_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$A_3 = P_3^T L_3 U_3$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $P_3 = E_{24}$.

Notiamo che $rk\, A_3 = 3$, e una base per $Col(A_3)$ è data dalla prima, la terza e la quarta colonna di A_3. Lo spazio nullo di A_3 ha dimensione 2, e una base si ottiene risolvendo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice U_3, che ammette infinite soluzioni dipendenti da due parametri (x_2 e x_5).
Pensando alla matrice A_3 come ad una matrice completa associata ad un sistema lineare, si ha che tale sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro.

E2) Sia U il sottospazio di $\mathbb{C}^4$ così definito:

$$U = \left\langle \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle .$$

Si trovi una base ortogonale U e la si completi a una base ortogonale di $\mathbb{C}^4$. Si determini inoltre la proiezione ortogonale $P_U(v)$, dove $\mathbf{v} = [i \quad -1 \quad 1+i \quad 0]^T$.

Soluzione Consideriamo la matrice C_U che ha per colonne i generatori del sottospazio vettoriale U. Applichiamo l'eliminazione di Gauss (EG) a C_U per determinare la dimensione di U.

$$C_U \xrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si nota che la quarta colonna è non dominante, quindi il vettore $\mathbf{v}_4$ è linearmente dipendente dagli altri tre (in effetti era semplice notare che $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3$).
Applichiamo ora l'algoritmo di Gram-Schmidt (GS) ai vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Poniamo $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$, quindi:

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}\,\mathbf{u}_1 = \frac{1}{7}(4 \quad 3 \quad -1 \quad -3)^t$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}\,\mathbf{u}_1 - \frac{(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)}\,\mathbf{u}_2 = \frac{1}{5}(1 \quad 2 \quad 1 \quad 3)^t$$

Completiamo ora la base $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ ad una base ortonormale di $\mathbb{C}^4$. Ricordiamo che $\mathbb{C}^4 = Col(A) \oplus N(A^H)$, in cui A è la matrice che ha per colonne i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Inoltre sappiamo che $N(A^H)$ è il complemento ortogonale di $Col(A)$. Sia ha che $N(A^H) =< \mathbf{w} = (1, -1, 1, 0)^t >$. Quindi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{w}$ formano una base ortogonale di $\mathbb{C}^4$.
Calcoliamo ora la proiezione $P_U(\mathbf{v})$ di $\mathbf{v}$ su U.

$$P_U(\mathbf{v}) = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v})}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}\mathbf{u}_1 + \frac{(\mathbf{u}_2|\mathbf{v})}{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)}\mathbf{u}_2 + \frac{(\mathbf{u}_3|\mathbf{v})}{(\mathbf{u}_3|\mathbf{u}_3)}\mathbf{u}_3 = \frac{1}{3}(-2+i \quad -1+2i \quad 1+i \quad 0)^t$$

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta & 1 & 0 & 0 \\ \beta^2 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Per $\beta = 1$, si trovi una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_1$. Se B_1 è la matrice associata a un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sia sul dominio che sul codominio, si scriva la matrice associata a f rispetto alla base canonica su dominio e codominio.

Soluzione Il polinomio caratteristico della matrice B_β è

$$p_{B_\beta}(x) = x^2\,(x-4)\,(x-2\beta)$$

Basta sviluppare il determinate della matrice $B_\beta - x\,\mathrm{Id}_{4\times4}$, ad esempio, rispetto alla quarta riga ottenendo, $-4\,[(\beta-x)^2-\beta^2]+(2-x)\,(2-x)\,[(\beta-x)^2-\beta^2]$ e poi raccogliendo il fattore $(\beta-x)^2-\beta^2$.

Caso $\beta \neq 0, 2$.

Per $\beta \neq 0, 2$, B_β è diagonalizzabile se e solo se $m_a(0) = m_g(0) = 2$. Calcoliamo la molteplicità geometrica dell'autovalore 0. $m_g(0) = \dim(N(B_\beta - 0\,\mathrm{Id}_{4\times4})) = 4 - rk(B_\beta - 0\,\mathrm{Id}_{4\times4}))$. Si verifica che il rango della matrice B_β è sempre 2, indipendentemente da β.
Quindi $\dim(N(B_\beta - 0Id_{4\times4})) = \dim(N(B_\beta)) = 2$ e perciò $m_g(0) = 2 = m_a(0)$ e B_β è diagonalizzabile.

Caso $\beta = 0$.

Da quanto detto in precedenza si ha che B_0 non è diagonalizzabile, infatti lo sarebbe se e solo se $m_a(0) = m_g(0)$. Però $m_a(0) = 3$, mentre $m_g(0) = \dim(N(B_0 - 0\,\mathrm{Id}_{4\times4})) = 4 - rk(B_0) = 2$, poichè il rango di B_β è 2 per ogni β.

Caso $\beta = 2$.

Per $\beta = 2$, da quanto detto in precedenza si ha che B_2 è diagonalizzabile se e solo se $m_a(4) = m_g(4)$. Ora, $m_a(4) = 2$; calcoliamo allora $m_g(2) = 4 - rk(B_2 - 4\,\mathrm{Id}_{4\times4})$. Il rango della matrice $B_2 - 4\,\mathrm{Id}_{4\times4}$ è 2, quindi $m_g(4) = 2 = m_a(4)$ e quindi B_2 è diagonalizzabile.

Determiniamo una base di $\mathbb{C}^4$ composta da autovettori nel caso in cui $\beta = 1$. Determiniamo l'autovettore $\mathbf{v}_4$ relativo all'autovalore 4. Dobbiamo cioè determinare un generatore di $N(B_1 - 4\,\mathrm{Id}_{4\times4})$. Si ha che $\mathbf{v}_4 = (0,0,2,1)^t$. Analogamente per l'autovalore 2, $\mathbf{v}_2 = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^t$. L'autospazio relativo all'autovalore 0 ha dimensione due, quindi avremo due generatori di tale autospazio, che si ottengo scrivfendo un insieme di generatori di $N(B_1)$. Essi sono $\mathbf{v}_{0,1} = (0 \quad 0 \quad -2 \quad 1)^t$ e $\mathbf{v}_{0,2} = (-1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^t$. Quindi $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_{0,1}, \mathbf{v}_{0,2}\}$ formano una base di autovettori per $\mathbb{C}^4$.

Scriviamo la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{E}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ e la sua inversa $\mathcal{M}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza la matrice associata all'applicazione f con la base canonica su dominio e codominio è $A = \mathcal{M}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}\,B_1\,\mathcal{M}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$, cioè

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 5 & -3 & -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$