CENNI DI TRIGONOMETRIA

Siano Π il piano e $C \in \Pi$ un suo punto. Un *circolo* (o circonferenza) in Π di centro C e raggio $r \in \mathbb{R}^*_+$ è il luogo gemetrico dei punti $P \in \Pi$ che distano r da C.
Un circolo possiede due naturali versi di percorrenza, *orario* e *antiorario* (accettiamo questo fatto come postulato). Fissiamo, ora, un punto U su un circolo, a partire da U in verso orario o antiorario, per una lunghezza pari a s (se $s \geq 2\pi r$ si fa un intero giro e quindi si andrà avanti nel verso scelto di $s - 2\pi r$; se invece $s \geq 4\pi r$ si fanno due giri e ...). Quindi partendo da un punto U si può percorrere una circonferenza, in verso antiorario od orario, per un arco di lunghezza s. Per convenzione poniamo come *positivo* il verso di percorrenza antiorario.
Ricordiamo ora che se in Π viene fissato un sistema di riferimento cartesiano (ortonoemale monometrico), si definisce una biiezione tra Π e $\mathbb{R}^2$.
Quindi l'insieme

$$S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} |\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

è il *circolo unitario* in $\mathbb{R}^2$.

A questo punto possiamo definire una funzione

$$\rho : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$

come segue: $\rho(0) = (1, 0)$ e fissato $x \in \mathbb{R}^*$, $\rho(x)$ è quel punto che si ottiene in S^1 partendo da $U = (1, 0)$ e percorrendo su S^1 un arco di lunghezza $|x|$, nel verso orario se $x < 0$, antiorario se $x > 0$.
La circonferenza è lunga 2π, quindi i valori di ρ si ripetono ogni qualvolta che x aumenta (o diminuisce) di $2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Osservazione 1. Empiricamente la funzione ρ, detta *avvolgimento*, si può realizzare prendendo un disco (il cui raggio sarà l'unitš di misura) su cui segnamo alcuni punti (rispetto al sitema di riferimento cartesiano ortogonale di origine il centro del disco e unità di misura il raggio del disco): $(1, 0)$; $(0, 1)$; $(-1, 0)$, $(0, -1)$. Poi si prende un filo sottile (non elastico) su cui si segnano alcuni valori rispetto all'unità di misura (cioè il raggio del disco): $(0, 1, -1, \frac{\pi}{2}, \ldots)$. Quindi si porta a coincidere lo zero segnato sul filo col punto $(1, 0)$ sul disco ed avvolgendo strettamente il disco. I punti corrispondenti vengono a sovrapporsi.
Notiamo che si definisce radiante come quell'angolo il cui arco corrispondente è il luogo come il raggio.

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\rho(x) \in S^1$ può essere scomposto nelle due coordinate:

$$\rho(x) = (\rho_1(x), \rho_2(x))$$

In altre parole, conoscere ρ è equivalente a conoscere le funzioni $\rho_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\rho_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ date da, $\rho_1 = \pi_1 \circ \rho$, $\rho_2 = \pi_2 \circ \rho$, in cui π_1 e π_2 sono le proiezioni di $\mathbb{R}^2$ sul primo e seondo fattore di $\mathbb{R}^2$.

Diciamo funzione **seno** la funzione ρ_2 e funzione **coseno** la funzione ρ_1.

Le funzioni coseno e seno, quindi, sono le componenti della funzione avvolgimento, in particolare il coseno. Inoltre le proprietà della funzione ρ si traducono nelle proprietš delle funzioni coeseno e seno.

In primo luogo si ha l'*identità fondamentale*:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Inoltre è immediato notare che l'insieme di definizione sia del seno che del coseno è $\mathbb{R}$ e l'immagine è $[-1, 1]$.
Inoltre, $\rho_1(-x) = \rho_1(x)$ e $\rho_2(-x) = -\rho_2(x)$, cioè le funzioni coseno e seno sono *pari* e *dispari*, rispettivamente.

È immediato notare alcuni valori del seno e del coseno, come riassunto nella tabella ??. Possiamo

angolo	valore seno	valore coseno
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0
π	0	-1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0

Tabella 1: valori seno e coseno

ora disegnare il grafico del seno, in un riferimento cartesiano in cui l'angolo θ funge da variabile indipendente. Notiamo che essendo l'angolo θ un angolo orientato, ha senso assegnare valori negativi a θ. Ha senso inoltre, assegnare a θ anche valori maggiori dell'angolo giro 2π (o minori -2π, rispettivamente), considerando il fatto che θ e $\theta+2\pi$ individuano lo stesso angolo da un punto di vista geometrico, ma sono due numeri reali distinti. In questo modo si conta la periodicità dell'angolo. Possiamo costruire il grafico per punti, in base alla tabella ??: Analogamente determiniamo il

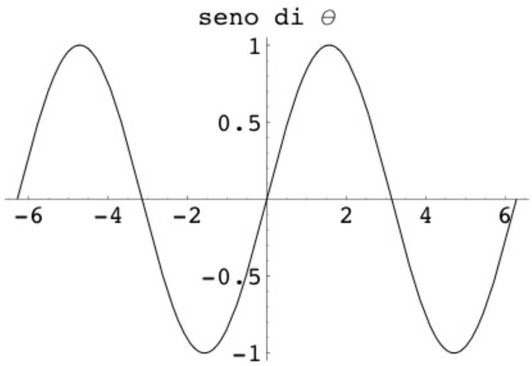
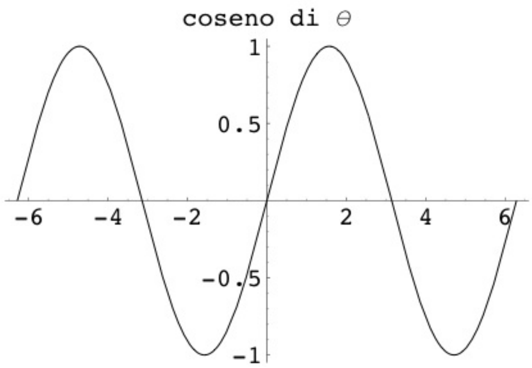


grafico del coseno:



1 Alcune proprietà del seno e del coseno

1.1 Indentità trigonometriche

È semplice verificare alcune relazioni del seno e del coseno dalla loro definizione. Per verificare tali proprietà può essere utile effettuare un disegno di ciò che si sta considerando.

$$\begin{aligned} \sin(\theta + 2\pi) &= \sin(\theta) \\ \cos(\theta + 2\pi) &= \cos(\theta) \end{aligned}$$

Le funzioni seno e coseno sono funzioni periodiche, di periodo 2π.

$$\begin{aligned} \sin(\theta + \pi) &= \sin(\theta) \\ \cos(\theta + \pi) &= -\cos(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) &= \cos(\theta) \\ \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) &= \sin(\theta) \end{aligned} \tag{1}$$

1.2 Formule di addizione

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \end{aligned} \tag{2}$$

Assumendo la validità della prima, ad esempio, le rimanenti si ricavano da essa e dalle (1).

1.3 Formule di duplicazione

$$\begin{aligned} &\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \\ &\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \end{aligned} \tag{3}$$

1.4 Formule di bisezione

$$\begin{aligned} |\cos\frac{\theta}{2}| &= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \\ |\sin\frac{\theta}{2}| &= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \end{aligned} \tag{4}$$

1.5 Formule di prostaferesi

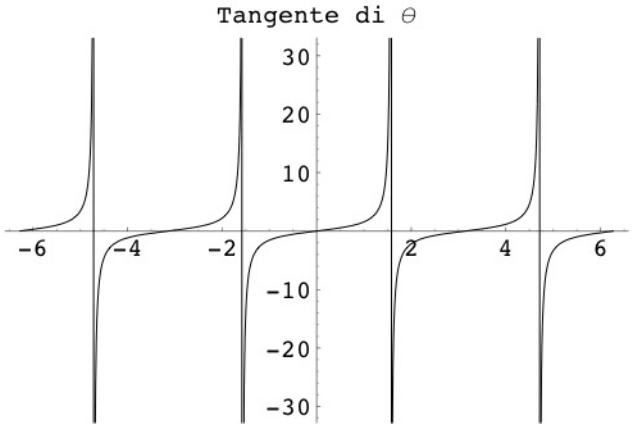
$$\begin{aligned} \cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \sin\alpha - \sin\beta &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

2 Tangente

Definiamo in maniera algebrica la funzione tangente. Consideriamo i valori dell'angolo θ, in modo che il coseno non sia nullo ($\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$). Definiamo tangente dell'angolo θ, indicata con $\tan\theta$ il rappoeto tra il seno e il coseno:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \tag{6}$$

È immediato ricavare alcuni valori notevoli della tangente a partire da quelli del seno e del coseno (si veda la tabella **??**): A partire dal grafico del seno e del coseno (effettuando il quoziente dei grafici punto per punto) oppure per punti si ricava il grafico della tangente:

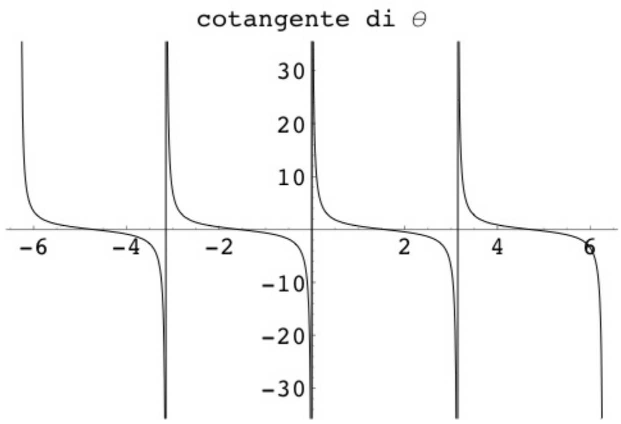


3 Cotangente

Similmente a quanto fatto per la tangente dell'angolo θ, definiamo algebricamente la cotangente dell'angolo θ. Consideriamo quei valori dell'angolo tali per cui il seno sia non nullo e cioè $\theta \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$:

$$\text{cotan}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \tag{7}$$

È semplice verificare che la cotangente è il reciproco della tangente, cioè $\text{cotan}\theta = \frac{1}{\tan\theta}$. Nella tabella seguente sono riportati alcuni valori fondamentali che assume la cotangente. A partire dal grafico del coseno e del seno oppure per punti si ricava il grafico della cotangente:



4 Alcune proprietà della tangente e della cotangente

Le proprietà fondamentali della tangente e della cotangente sono facilmente ottenibilii da quelle del seno e del coseno oppure direttamente dalla definizione.

5 FUNZIONI PERIODICHE

Definizione 2. sia $X \subset \mathbb{R}$, Y insieme, $f : X \longrightarrow Y$ applicazione. Un numero reale $\tau \in \mathbb{R}$ si dice **periodico** per f se per ogni $x \in X$, $x + \tau \in X$, $x - \tau \in X$ e

$$f(x + \tau) = f(x)$$

N.B. 1. Ogni funzione ammette 0 come periodo.

Definizione 3. $f : X \longrightarrow Y$ si dice *periodica* se f ammette almeno un periodo non nullo.

Esempio 1. Le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π e le funzioni tangente e cotangente sono periodiche di periodo 2π.

Riferimenti bibliografici

[1] G. de Marco, *Analisi zero.* Decibel-Zanichelli, Padova 1981.