

Logica Computazionale - 2007-8

esercizio 4

October 26, 2007

Esercizio 1. Leggere le dispense fino a pagina 22. Usiamo le seguenti abbreviazioni:

$\mathbf{N} =_{df} (A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A);$

$\mathbf{0} =_{df} \lambda f^{A \rightarrow A}. \lambda x^A. x,$

$\mathbf{1} =_{df} \lambda f^{A \rightarrow A}. \lambda x^A. f x,$

$\mathbf{2} =_{df} \lambda f^{A \rightarrow A}. \lambda x^A. f(fx), \dots$

$\mathbf{suc} =_{df} \lambda n^{\mathbf{N}}. \lambda f^{A \rightarrow A}. \lambda x^A. (nf)(fx), \dots$

$\mathbf{plus} =_{df} \lambda m^{\mathbf{N}}. \lambda n^{\mathbf{N}}. \lambda f^{A \rightarrow A}. \lambda x^A. (mf)((nf)x).$

$\mathbf{times} =_{df} \lambda m^{\mathbf{N}}. \lambda n^{\mathbf{N}}. \lambda f^{A \rightarrow A}. (m(nf)).$

- (a) Scrivi prove corrispondenti ai termini **3**, **suc**, **plus**, **times**
- (b) Scrivi prove corrispondenti a **(suc 1)**, **(plus 2 1)**, **(times 2 3)**¹.
- (c) Normalizza le prove trovate in (b).

Esercizio 2. La logica implicativa *affine* ha la restrizione che ogni \rightarrow -I può scaricare un pacchetto di *al massimo una foglia*.

Dimostra che in logica implicativa affine vale il *teorema di normalizzazione forte*: ogni sequenza di riduzioni termina in una deduzione in forma normale.

¹Notazione: **(suc 1)** è **suc** applicato ad **1** e **(plus 2 1)** è **plus** applicato a **2** ed a **1**.

Soluzioni modello dell'esercizio 1.

Prova di **0** : **N**:

$$(1) \frac{x : A}{\lambda x. x : A \rightarrow A} \rightarrow\text{-I}$$

$$(2) \frac{(1) \frac{x : A}{\lambda x. x : A \rightarrow A} \rightarrow\text{-I}}{\lambda f. \lambda x. x : (A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)} \rightarrow\text{-I}$$

Prova di **2** : **N**:

$$(2) \frac{f : A \rightarrow A}{f : A \rightarrow A} \quad (2) \frac{f : A \rightarrow A \quad x : A}{fx : A} \rightarrow\text{-E}$$

$$(1) \frac{f(fx) : A}{\lambda x. f(fx) : A \rightarrow A} \rightarrow\text{-I}$$

$$(1) \frac{(1) \frac{f(fx) : A}{\lambda x. f(fx) : A \rightarrow A} \rightarrow\text{-I}}{\lambda f. \lambda x. f(fx) : (A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)} \rightarrow\text{-I}$$